MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 7: Predikatlogikk

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

4. februar 2008

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene T og F, begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.
- Vi har sett hvordan vi kan undersøke egenskapene til et sammensatt utsagn A ved å skrive ut sannhetsverditabellen til A.
- Et sammensatt utsagn A er en tautologi om A alltid får verdien T og A er en kontradiksjon om A alltid får verdien F.
- To sammensatte utsagn A og B er logisk ekvivalente om de alltid får den samme sannhetsverdien når vi gir sannhetsverdier til utsagnsvariablene.
- Dette er det samme som at $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.
- Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er logisk ekvivalente.

Oppsummering

- Vi diskuterte konvensjoner for å sette parenteser.
- Rekkevidden til $\neg$ er det nærmeste deluttrykket som kan oppfattes som et utsagn. Vil vi at $\neg$ skal rekke lenger enn til nærmeste utsagnsvariabel, må vi bruke parenteser.
- Rekkevidden til $\wedge$ og $\vee$ går til nærmeste symbol som ikke er $\neg$
- Rekkevidden til $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$ går frem til neste forekomst av $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$, det vil si, forbi $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.
- Vi kan sette $\wedge$ mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, og vi kan sette $\vee$ mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, men bruker vi både $\wedge$ og $\vee$ må vi bruke parenteser for å bestemme hvilket som er hovedkonnektivet.
- Vi må alltid bruke parenteser hvis vi bruker flere $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$ etter hverandre, se eksempel.

Oppsummering

Eksempel $(p \to (q \to r))$

- Dette utsagnet får verdien F når $p = \mathrm{T}$ og $q \to r = \mathrm{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien F nøyaktig når $p = \mathrm{T}$, $q = \mathrm{T}$ og $r = \mathrm{F}$.

Eksempel $((p \to q) \to r)$

- Dette utsagnet får verdien F når $p \to q = \mathrm{T}$ og $r = \mathrm{F}$.
- Dette utsagnet får altså verdien F når det første utsagnet får det, men også når $p = \mathrm{F}$ og $r = \mathrm{F}$ (uansett verdi på q.)

Utsagnene er altså ikke logisk ekvivalente.

Vi må bruke parentesene for å skille dem.

Oppsummering

- Vi refererte til side 55 i boka når det gjaldt regnereglene for logikk.
- Noen av de viktigste er:
  - DeMorgans lover:
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
  - Distributive lover:
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
- Vi skal se på et eksempel på hvordan vi kan vise at et sammensatt utsagn er en tautologi ved å bruke disse regnereglene.
- Vi henviser til betegnelsene i tabellen på side 55.

Logisk ekvivalens

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av $\rightarrow$]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee p$ [To gangers bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg q)) \vee p$ [Distributiv lov]
- $(\neg p \wedge \mathrm{T}) \vee \mathrm{p}$ [Invers lov]
- $\neg p \vee p$ [Identitetsloven]
- T [Invers lov]

Logisk ekvivalens

- Vi antydet også sist at det er mulig å vise at et sammensatt utsagn A er en tautologi ved å vise at likningen

$$A = \mathrm{F}$$

  er overbestemt.
- Vi skal gi ett eksempel på hvordan vi kan "løse slike likninger".
- Metoden kan være nyttig når A har mange forekomster av $\rightarrow$.
- Programmeringsspråket *PROLOG* er basert på en systematisering av denne metoden, koblet med predikatlogikk.

Logisk ekvivalens

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1 $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathrm{F}$

2 $p \to q = \mathrm{T}$ (Fra 1.)

3 $(q \to r) \to (p \to r) = \mathrm{F}$ (Fra 1.)

4 $q \to r = \mathrm{T}$ (Fra 3.)

5 $p \to r = \mathrm{F}$ (Fra 3.)

6 $p = \mathrm{T}$ (Fra 5.)

7 $r = \mathrm{F}$ (Fra 5.)

8 $q = \mathrm{F}$ (Fra 4 og 7.)

9 $p = \mathrm{F}$ (Fra 2 og 8)]

10 $p \neq p$ (Fra 6 og 9.)

Logisk ekvivalens

Oppgave

a) Vis at hvis A, B og C er sammensatte utsagn, så vil

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

og at

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A).$$

b) Forklar hvorfor dette betyr at rekkefølge og parentessetting ikke betyr noe i et utsagnslogisk uttrykk som bare bruker bindeordet $\leftrightarrow$

c) [Vanskelig] Hvordan kan vi lett avgjøre om et slikt uttrykk er en tautologi eller ikke?

Predikatlogikk

Utsagnslogikk er enkel i den forstand at gitt et utsagnslogisk uttrykk er det muligens tidkrevende, men i prinsippet enkelt, å avgjøre om vi står overfor en tautologi, en kontradiksjon eller noe annet.

Utfordringen i utsagnslogikk er å finne algoritmer som raskt kan løse denne typen problemstillinger for sammensatte utsagn (med mange utsagnsvariable) som forekommer i praktiske anvendelser.

Utsagnslogikk er også enkel i den forstand at den er uttrykksfattig, det er mange tilsynelatende logiske sluttninger som ikke kan presses inn i formatet til tautologier.

Vi skal starte med et eksempel:

Predikatlogikk

Eksempel

Anta at vi vet følgende:

- All fluesopp er giftig.
- Det finnes sopp som ikke er giftig.

Da må vi ha lov til å konkludere med

- Det finnes sopp som ikke er fluesopp.

Eksempel

- Vi vet følgende:
  - Alle kvadrattall er ≥ 0.
  - Det finnes tall som ikke er ≥ 0

  Da konkluderer vi med

  - Det finnes tall som ikke er kvadrattall.

Dette er det samme argumentet i to forkledninger.

Predikatlogikk

Da vi innledet utsagnslogikken definerte vi et predikat som en ytring med variable, som ville bli sann eller usann hver gang vi gir variablene verdier.

I det første eksemplet kan vi betrakte *soppen* som en variabel som kan ta en hvilken som helst sopp som verdi.

Da blir *soppen er giftig* og *soppen er en fluesopp* predikater.

I det andre eksemplet er *tall* en variabel som kan ta alle hele tall som verdi. Da er *tallet er et kvadrattall* og *tallet er* ≥ 0 predikatene.

Det gjennstår å betrakte uttrykk som *alle sopper* og *det finnes tall* som en del av en utvidet logisk struktur.

Predikatlogikk

Eksempel

La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en funksjon.

Hvordan skal vi uttrykke

$$f \text{ har et minimumspunkt?}$$

Løsning

Det finnes $x \in [a, b]$ slik at for alle $y \in [a, b]$ vil $f(x) \leq f(y)$.

Trangen til å finne egne symboler for det finnes og for alle virker snart påtrengende.

Predikatlogikk

Vi ser på et eksempel til:

Det finnes ikke noe største primtall

Vi prøver med litt utsagnslogikk:

$$\neg(\textit{Det finnes et største primtall}),$$

det vil si at det er ikke slik at det finnes et primtall som er større eller lik alle primtallene.

Vi trenger litt formelt språk for å få orden på dette!!!

Kvantorer

Definisjon

- Hvis P er et predikat og x er en variabel, vil

$$\exists x P$$

uttrykke at det finnes en verdi av x slik at P holder.

$$\forall x P$$

uttrykker at P holder for alle verdier x kan ha.

Vi kaller $\exists$ og $\forall$ for kvantorer, og vi regner dem som en del av det formelle logiske vokabularet.

Kvantorer

Eksempel

a)

$$\exists x(x \in [a,b] \land \forall y(y \in [a,b] \rightarrow f(x) \leq f(y)))$$

uttrykker at det finnes et minimumspunkt for f på $[a,b]$.

b)

$$\neg\exists x(x \text{ primtall} \land \forall y(y \text{ primtall} \rightarrow y \leq x))$$

uttrykker at det ikke finnes et største primtall.

Kvantorer

Det kan være lurt å øve seg på å skrive uttalelser i dagligtale om til utsagn med kvantorer, men for det meste vil vi bruke kvantorer når vi trenger matematisk presisjon i matematikk eller informatikk.

Vi skal se på noen eksempler på hvordan man oversetter fra dagligtale til formalspråk og omvendt.

Flere eksempler finnes i læreboka.

Kvantorer

Eksempel

- *Alle hunder har lopper, men ikke alle hunder har lus.*

  $\forall x\,(\mathrm{hund}\ x \rightarrow \exists y(\mathrm{loppe}\ y \wedge x\ \mathrm{har}\ y)) \wedge \neg\forall x\,(\mathrm{hund}\ x \rightarrow \exists y(\mathrm{lus}\ y \wedge x\ \mathrm{har}\ y))$
- *Alle har et søskenbarn på Gjøvik.*

  $\forall x \exists y(y$ bor på Gjøvik og y er søskenbarn til $x)$
- *Ingen er bedre enn Tor til å fiske laks*

  $\neg\exists x(x$ er bedre enn Tor til å fiske laks $)$

Kvantorer

Eksempel

- $\forall x \forall y(\exists z(\text{far}(z,x) \wedge \text{far}(z,y)) \rightarrow \text{brødre}(x,y))$

  Hvis to personer har en felles far, er de brødre.

  Dette er selvfølgelig ikke sant.

- $\forall x \exists y(x \text{ har slått } y \wedge y \text{ har slått } x)$

  Dette dreier seg om fotball-lag.

  For alle lag finnes det et annet lag slik at de har slått hverandre.

- $\neg \forall x \exists y(y \text{ er bestevennen til } x)$

  Ikke alle har en bestevenn.

Kvantorer

Eksempel

a) $\exists x \forall y (x \leq y)$

b) $\forall y \exists x (x \leq y)$

- Rekkefølgen vi skriver kvantorene i betyr mye for hva utsagnet sier:
  - a) sier at det finnes et minste objekt.
  - b) sier at det alltid finnes et objekt som er mindre eller lik.
- Hvis x varierer over de hele tallene er a) feil, mens b) holder.
- Hvis x varierer over de naturlige tallene, holder a).
- b) holder også, fordi gitt en verdi for y kan vi bruke samme verdi for x.
- Før vi kan bestemme om et utsagn med kvantorer er sant eller usant, må vi vite hvilke mulige verdier variablene kan ta.
- I en programmeringssammenheng vil vi alltid deklarere datatypen til en variabel, og da kan variabelen ta alle verdier i denne datatypen.

Kvantorer

Når er et utsagn med kvantorer logisk holdbart?

La oss betrakte følgende eksempel:

Eksempel

$$\forall x \forall y \forall z((x < y \land y < z) \to x < z).$$

- Selv om vi ikke har bestemt oss for hvilke verdier x, y og z kan ta, uttrykker dette en sammenheng som vi mener er underforstått når vi bruker symbolet $<$.
- La x, y og z variere over lagene i en avdeling i en fotball- eller håndball-liga.
- Hvis L_1 og L_2 er to lag, sier vi at $L_1 < L_2$ hvis L_1 ble dårligere enn L_2 i de innbyrdes oppgjørene.
- Det er ofte at vi kan finne tre lag som "slår hverandre".
- I den situasjonen er ikke utsagnet over sant.

Kvantorer

Definisjon

- Et predikat er en ytring
$$P(x_1, \ldots, x_n)$$
hvor det kan forekomme variable.
- Hvis P er et predikat og x er en variabel, er $\exists x P$ og $\forall x P$ nye predikater hvor variabelen x er bundet.
- Variable som ikke er bundet kalles fri
- Hvis vi setter inn (lovlige) verdier for de frie variablene i et predikat får vi et utsagn.
- For å bestemme om et utsagn er sant eller usant må vi bestemme variasjonsområdene til alle variablene samt hva andre symboler skal stå for.

Kvantorer

Definisjon (fortsatt)

- En setning er et predikat uten frie variable. Dette kalles også ofte for et lukket utsagn.
- En setning er logisk gyldig dersom den er sann uansett hvilke variasjonsområder vi velger og uansett hva vi lar symbolene bety.

Denne definisjonen er ikke matematisk sett helt presis, men den holder for vårt fomål

Kvantorer

Eksempel

- $x < y \to \neg(y < x)$ er et predikat med to fri variable x og y.
- $\exists x(x < y \to \neg(y < x))$ er et predikat med en fri variabel y og en bunden variabel x.
- $\forall y \exists x(x < y \to \neg(y < x))$ er en setning, fordi begge variablene er bundne.
- For å bestemme om denne setningen er sann eller usann, må vi bestemme oss for hvilke verdier x og y kan ta, og for hva vi mener med $x < y$.
- Hvis vi lar x og y variere over $\mathbb{Z}$ og $<$ være vanlig ordning, viser vi at setningen er sann på vanlig matematisk måte:

Kvantorer

Eksempel $(\forall y \exists x (x < y \to \neg(y < x)))$

- Beviset kan formuleses slik;

  La y få en vilkårlig verdi a
  La x også få verdien a.
  Siden $a < a$ er usant, må $\neg(a < a)$ være sant, og sannhetsverdien til

  $$x < y \to \neg(y < x)$$

  blir T når vi setter inn a for både x og y.
  Merk at a var vilkårlig da vi satte a inn for x, men valgt med omhu da vi satte a inn for y.

- Dette gir oss ingen grunn til å mene at setningen er logisk gyldig.

Kvantorer

- Ved hjelp av læreboka listet vi opp en rekke regneregler for utsagnslogikk.
- Det finnes tilsvarende regler for regning med uttrykk med kvantorer.
- En alternativ måte er å isolere noen utsagn i predikatlogikk som aksiomer og fastsette noen regler for hvordan man kan bevise andre utsagn fra disse aksiomene.
- Dette er noe som taes opp på et senere trinn i emner både ved Institutt for Informatikk og ved Matematisk Institutt.
- Vi skal se på et par regneregler som vil være utledbare i en slik logikk, men hvor vi kan overbevise oss om gyldigheten her og nå.
- Vi definerte $\equiv$ som en relasjon mellom utsagnslogiske utsagn, men vil utvide bruken til utsagn med kvantorer, når utsagnene åpenbart er sanne under nøyaktig de samme omstendighetene.

Kvantorer

Eksempel (DeMorgans lover for kvantorer)

For alle utsagn A og variable x vil

1. $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$
2. $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$

Noen ganger kan det være lettere å argumentere for en abstrakt påstand ved å gi et dekkende eksempel.
Vi kan argumentere for 1 ved følgende eksempel som dekker alle andre eksempler:
Vi mener det samme når vi sier

- Det er feil at alle russere er katolikker.
- Det finnes en russer som ikke er katolikk.

Vi kan argumentere for 2 ved følgende eksempel:
Vi mener det samme når vi sier

- Det finnes ingen ærlig politiker.
- For alle politikere gjelder det at de ikke er ærlige.

Kvantorer

Eksempel (Sammentrekning av kvantorer)

For alle utsagn A og B gjelder

1. $\exists x A \vee \exists x B \equiv \exists x (A \vee B)$
2. $\forall x A \wedge \forall x B \equiv \forall x (A \wedge B)$

- Om vi sier

  Det finnes en elev i klassen som spiller tennis eller det finnes en som spiller badminton

  mener vi det samme som om vi sier

  Det finnes en elev i klassen som spiller tennis eller badminton.

Kvantorer

- Om vi sier

  Alle arbeiderne fikk høyere lønn og alle arbeiderne fikk kortere arbeidstid

  mener vi det samme som om vi sier

  Alle arbeiderne fikk høyere lønn og kortere arbeidstid

  Igjen er disse eksemplene dekkende for den generelle situasjonen.

Kvantorer

- Det er VIKTIG at man ikke trekker $\exists x$ over en $\wedge$ eller en $\forall x$ over en $\vee$.

Eksempel (To moteksempler)

- Utsagnet

  Noen Nordmenn er mangemillionærer og noen Nordmenn lever under fattigdomsgrensen

  er på formen

$$\exists x M(x) \wedge \exists x UF(x).$$

  Utsagnet

$$\exists x (M(x) \wedge UF(x)$$

  uttrykker at noen Nordmenn både er millionærer og samtidig lever under fattigdomsgrensen.

Kvantorer

Eksempel (To moteksempler, fortsatt)

Den første påstanden er nok sann, mens den andre er heller tvilsom.

Det betyr at de to utsagnene ikke er logisk ekvivalente.

Kvantorer

Eksempel (To moteksempler, fortsatt)

- Utsagnet

  Alle barna får tilbud om å stå slalåm eller å gå langrenn

  er på formen

  $$\forall x(S(x) \vee L(x)).$$

  Utsagnet

  $$\forall x S(x) \vee \forall x L(x)$$

  sier at det er det samme tilbudet til alle barna, mens det første utsagnet gir muligheten for at det er et valg.

  Utsagnene er derfor ikke logisk ekvivalente.