MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 10: Diverse ukeoppgaver

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

17. april 2008

Vi øver oss litt på løse rekurrenslikninger.

Oppgave 7.23

Løs følgende rekurrenslikning

(c) $t(n) - 6t(n-1) + 9t(n-2) = 0,\ t(1) = 3,\ t(2) = 2$

Løsning (c)

- Den karakteristiske likningen til likningen $t(n) - 6t(n-1) + 9t(n-2) = 0$ er $x^2 - 6x + 9 = 0$.
- Vi kan skrive $(x-3)(x-3) = 0$.
- $x = 3$ er den eneste løsningen av denne likningen.
- Den generelle løsningen til rekurrenslikningen er $t(n) = (A + Bn) \cdot 3^n$
- $t(1) = 3$ gir $(A + B \cdot 1)3^1 = 3A + 3B = 3$.
- $t(2) = 2$ gir $(A + B \cdot 2)3^2 = 9A + 18B = 2$.
- Fra $3A + 3B = 3$ får vi $9A + 9B = 9$, og dermed $18B - 2 = 9B - 9$, som gir $9B = -7$ og $B = -\frac{7}{9}$
- Ved å sette inn $B = -\frac{7}{9}$ i $9A + 9B = 9$ får vi $9A - 7 = 9$ og $9A = 16$, som gir $A = \frac{16}{9}$.
- Løsningen er derfor $t(n) = (\frac{16}{9} - \frac{7}{9}n)3^n$.

Oppgave 9.1

I en klasse på 35 elever, så snakker 12 tysk og 5 japansk. Hvis to elever snakker begge disse språkene, hvor mange studenter snakker ingen av språkene.

Løsning

- La T være mengden av de som snakker tysk.
- La J være mengden av de som snakker japansk.
- Vi har $|T| = 12$ og $|J| = 5$ og $|T \cap J| = 2$.
- Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet sier: $|T \cup J| = |T| + |J| - |T \cap J|$.
- Vi får derfor $|T \cup J| = 12 + 5 - 2 = 15$.
- Det betyr at 15 av 35 snakker enten tysk eller japansk.
- Da er det 20 som ikke snakker noen av språkene.

Oppgave 9.8

Lovlige passord på 8 tegn. Første tegn må være bokstav, og resten må være bokstaver eller tall. (Vi skiller ikke mellom store og små bokstaver og tar ikke med æ,ø,å.) Et passord må inneholde minst ett tall. Hvor mange mulige passord fins det?

Løsning

- Antall muligheter for første tegn er 26.
- Vi regner ut mulige kombinasjoner for de 7 neste tegnene først. Også ganger vi med 26 til slutt.
- Minst ett av de 7 tegnene må være et tall.
- Antall strenger på 7 tegn som ikke innholder tall er 26^7.
- Antall strenger på 7 tegn er til sammen 36^7.
- Antall muligheter for de neste 7 tegnene er derfor $36^7 - 26^7$.
- Svaret er derfor $26 \cdot (36^7 - 26^7)$, som er 1828641201920.

Oppgave 9.11

Regn ut (a) ${}^{10}P_6$, (b) ${}^{12}P_8$, (c) ${}^{13}C_5$, og (d) $\binom{15}{11}$.

Løsning

$${}^{10}P_6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$$

$${}^{12}P_8 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 19958400$$

$${}^{13}C_5 = \frac{13!}{8!5!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot \mathbf{1}1 \cdot 9 = 1287$$

$$\binom{15}{11} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 15 \cdot 7 \cdot 13 = 1365$$

Oppgave 9.13

Poengsummene til 12 elever skal gis som data til et program.

$$15, 13, 18, 15, 7, 12, 10, 13, 9, 5, 15, 17$$

I hvor mange forskjellige rekkefølger kan dette gjøres?

Løsning

- Vi sorterer dem for å se hvor mange like tall det er:

$$5, 7, 9, 10, 12, 13, 13, 15, 15, 15, 17, 18$$

- 13 forekommer 2 ganger, og 15 forekommer 3 ganger.
- Svaret blir

$$\frac{12!}{2!3!} = 11! = 39916800$$

Oppgave 9.17

Bevis følgende påstand

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Løsning

Tavleregning.

Oppgave 9.18

Vis at ${}^{n}P_r = n({}^{n-1}P_{r-1})$.

Løsning

$$n \cdot ({}^{n-1}P_{r-1}) = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^{n}P_r$$

Oppgave 9.20

Ved å tolke $\binom{n}{r}$ som antall delmengder av størrelse r av en mengde av størrelse n, finn verdien til

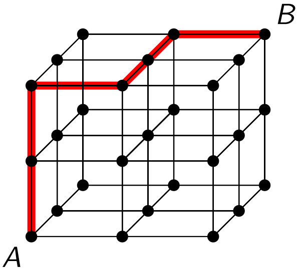
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Løsning

Summen må bli antall delmengder totalt, som er 2^n.

Oppgave fra forelesning

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra A til B i denne $2 \times 2 \times 2$-kuben? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover, til høyre eller innover?



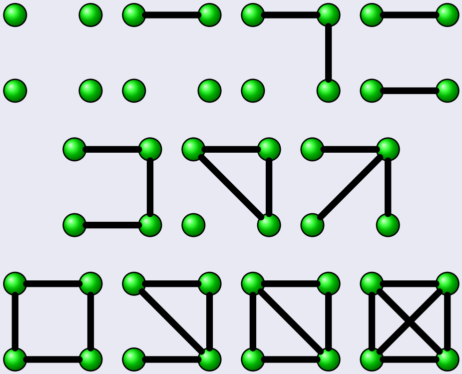
Løsning

- Vi kan representere mulige måter å gå fra A til B som antall forskjellige ord i alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow, \nearrow\}$
- Det er 6! måter å stokke om tegnene i et ord som er 6 tegn langt.
- Av disse må vi identifisere ord som er like.
- Svaret blir derfor $\frac{6!}{2!2!2!} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$.
- Det går an å finne svaret på en annen måte også.
- Ordet skal være seks tegn langt, og på nøyaktig to av posisjonene må tegnet $\uparrow$ stå.
- Det er $\binom{6}{2} = 15$ forskjellige måter å gjøre det på.
- Da er det fire posisjoner igjen, og på nøyaktig to av disse må $\rightarrow$ stå.
- Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre det på.
- Det er altså $15 \cdot 6 = 90$ forskjellige ord av lengde 6.

Oppgave 10.2

Tegn alle 11 enkle grafer med 4 noder.

Løsning



Oppgave 10.3

Bekreft for hver av grafene i figuren at summen av gradene til nodene er lik det dobbelte av antall kanter.

Løsning

Tavleregning.

Oppgave 10.4

Tegn en graf hvor nodene har følgende grader, eller forklar hvorfor det ikke fins noen slik graf.

(a) 2, 3, 3, 4, 5

(b) 2, 3, 3, 3, 3

Løsning

(a) Summen av gradene er $2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 17$. Det er umulig, siden summene av gradene må være et partall.

(b) Summene av gradene er $2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 14$. Grafen må ha 5 noder og 7 kanter. Vi tegner på tavla.

Oppgave 10.5

Finn et alternativt bevis for at en komplett graf med n noder har $[n(n-1)/2]$ kanter, ved å bruke resultatet om at summen av gradene til nodene er lik to ganger antallet kanter.

Løsning

- La K_n være den komplette grafen med n noder.
- Hva er graden til en node i denne grafen? Graden må være $n-1$ for alle n nodene.
- Summen til gradene blir derfor $n(n-1)$.
- Resultatet sier at dette er to ganger antallet kanter.
- Antallet kanter blir derfor $[n(n-1)/2]$. (Som er det samme som $\binom{n}{2}$.)

Oppgave 10.6

Hvis en enkel graf G har n noder og m kanter, hvor mange kanter har $\overline{G}$?

Løsning

- Vi vet at den komplette grafen med n noder har $\binom{n}{2}$ kanter.
- Vi har at e er en kant i $\overline{G}$ hvis og bare hvis e *ikke* en kant i G.
- Hvis vi tar kantene fra G og kantene fra $\overline{G}$, så får vi kantene i den komplette grafen, som det er $\binom{n}{2}$ av.
- Antall kanter i $\overline{G}$ blir derfor $\binom{n}{2} - m$.

Oppgave 10.7

La koblingsmatriser for grafene i figuren

Løsning

Tavleregning.

Oppgave 10.8

Tegn grafene med koblingsmatrisene som gitt i oppgaven.

Løsning

Tavleregning.