MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 12: Diverse oppgaver

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

22. mai 2008

Plan

Plan

- Dette er siste plenumsregning.

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!
    - Sted: Rom B534 i Niels Henrik Abels hus

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!
    - Sted: Rom B534 i Niels Henrik Abels hus
    - Tider:

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!
    - Sted: Rom B534 i Niels Henrik Abels hus
    - Tider:
        - Tirsdag 27/5 12-14

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!
  - Sted: Rom B534 i Niels Henrik Abels hus
  - Tider:
    - Tirsdag 27/5 12-14
    - Onsdag 28/5 10-12

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!
    - Sted: Rom B534 i Niels Henrik Abels hus
    - Tider:
        - Tirsdag 27/5 12-14
        - Onsdag 28/5 10-12
        - Tirsdag 3/6 12-14

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!
    - Sted: Rom B534 i Niels Henrik Abels hus
    - Tider:
        - Tirsdag 27/5 12-14
        - Onsdag 28/5 10-12
        - Tirsdag 3/6 12-14
        - Onsdag 4/6 12-14

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!
  - Sted: Rom B534 i Niels Henrik Abels hus
  - Tider:
    - Tirsdag 27/5 12-14
    - Onsdag 28/5 10-12
    - Tirsdag 3/6 12-14
    - Onsdag 4/6 12-14
- Jeg lager et løsningsforslag til ekstraoppgavene (Oppgavesett 4) og legger det ut i begynnelsen av neste uke.

Noen tips til eksamen

Noen tips til eksamen

- Vær effektive og ikke bli sittende og tenke altfor lenge på hver oppgave.

Noen tips til eksamen

- Vær effektive og ikke bli sittende og tenke altfor lenge på hver oppgave.
  - Det vil si, ikke få panikk hvis noe er litt for vanskelig ved første øyekast. Gå heller tilbake til oppgaven litt senere.

Noen tips til eksamen

- Vær effektive og ikke bli sittende og tenke altfor lenge på hver oppgave.
  - Det vil si, ikke få panikk hvis noe er litt for vanskelig ved første øyekast. Gå heller tilbake til oppgaven litt senere.
- Øv på å løse oppgaver og skrive bevis.

Noen tips til eksamen

- Vær effektive og ikke bli sittende og tenke altfor lenge på hver oppgave.
  - Det vil si, ikke få panikk hvis noe er litt for vanskelig ved første øyekast. Gå heller tilbake til oppgaven litt senere.
- Øv på å løse oppgaver og skrive bevis.
  - Ikke la eksamen være første gangen.

Noen tips til eksamen

- Vær effektive og ikke bli sittende og tenke altfor lenge på hver oppgave.
  - Det vil si, ikke få panikk hvis noe er litt for vanskelig ved første øyekast. Gå heller tilbake til oppgaven litt senere.
- Øv på å løse oppgaver og skrive bevis.
  - Ikke la eksamen være første gangen.
- Les oppgaveteksten nøye og svar på det som det spørres etter.

Noen tips til eksamen

- Vær effektive og ikke bli sittende og tenke altfor lenge på hver oppgave.
  - Det vil si, ikke få panikk hvis noe er litt for vanskelig ved første øyekast. Gå heller tilbake til oppgaven litt senere.
- Øv på å løse oppgaver og skrive bevis.
  - Ikke la eksamen være første gangen.
- Les oppgaveteksten nøye og svar på det som det spørres etter.
  - Ja, det er lurt å lese gjennom hele oppgavesettet først.

Noen tips til eksamen

- Vær effektive og ikke bli sittende og tenke altfor lenge på hver oppgave.
  - Det vil si, ikke få panikk hvis noe er litt for vanskelig ved første øyekast. Gå heller tilbake til oppgaven litt senere.
- Øv på å løse oppgaver og skrive bevis.
  - Ikke la eksamen være første gangen.
- Les oppgaveteksten nøye og svar på det som det spørres etter.
  - Ja, det er lurt å lese gjennom hele oppgavesettet først.
- Hvis du står fast, vis i hvert fall hva du har forstått. Den som retter en eksamen er ute etter å finne ut hva kandidaten *har forstått*.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere.
For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere. For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

(a) Begrunn at

$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere. For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

(a) Begrunn at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

(b) Vi definerer en relasjon R på X ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-er i t.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere. For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

(a) Begrunn at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

(b) Vi definerer en relasjon R på X ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-er i t. Du kan ta det for gitt at dette er en ekvivalensrelasjon.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere. For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

(a) Begrunn at

$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

(b) Vi definerer en relasjon R på X ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-er i t. Du kan ta det for gitt at dette er en ekvivalensrelasjon. La E betegne ekvivalensklassen til $s = 11011011$. Beregn $|E|$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere. For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

(a) Begrunn at

$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

(b) Vi definerer en relasjon R på X ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-er i t. Du kan ta det for gitt at dette er en ekvivalensrelasjon. La E betegne ekvivalensklassen til $s = 11011011$. Beregn $|E|$.

(c) Skriv pseudokoden for en algoritme som avgjør om to elementer i X er i relasjon med hverandre eller ikke (med hensyn på relasjonen definert i b)).

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere. For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

(a) Begrunn at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

(b) Vi definerer en relasjon R på X ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-er i t. Du kan ta det for gitt at dette er en ekvivalensrelasjon. La E betegne ekvivalensklassen til $s = 11011011$. Beregn $|E|$.

(c) Skriv pseudokoden for en algoritme som avgjør om to elementer i X er i relasjon med hverandre eller ikke (med hensyn på relasjonen definert i b)). Input antas å være to 8-bit strenger $s_1 \cdots s_8$ og $t_1 \cdots t_8$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere. For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

(a) Begrunn at

$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

(b) Vi definerer en relasjon R på X ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-er i t. Du kan ta det for gitt at dette er en ekvivalensrelasjon. La E betegne ekvivalensklassen til $s = 11011011$. Beregn $|E|$.

(c) Skriv pseudokoden for en algoritme som avgjør om to elementer i X er i relasjon med hverandre eller ikke (med hensyn på relasjonen definert i b)). Input antas å være to 8-bit strenger $s_1 \cdots s_8$ og $t_1 \cdots t_8$, mens output skal være "de to strengene er i relasjon med hverandre" eller "de to strengene er ikke i relasjon med hverandre".

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111
  - 11011111

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111
  - 11011111
  - 11101111

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111
  - 11011111
  - 11101111
  - 11110111

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111
  - 11011111
  - 11101111
  - 11110111
  - 11111011

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
    - 01111111
    - 10111111
    - 11011111
    - 11101111
    - 11110111
    - 11111011
    - 11111101

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
    - 01111111
    - 10111111
    - 11011111
    - 11101111
    - 11110111
    - 11111011
    - 11111101
    - 11111110

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111
  - 11011111
  - 11101111
  - 11110111
  - 11111011
  - 11111101
  - 11111110
- Vi ser at $|X_1| = 8$.

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111
  - 11011111
  - 11101111
  - 11110111
  - 11111011
  - 11111101
  - 11111110
- Vi ser at $|X_1| = 8$.
- X_2 betegner mengden av strenger med nøyaktig 2 stk. 0-ere.

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111
  - 11011111
  - 11101111
  - 11110111
  - 11111011
  - 11111101
  - 11111110
- Vi ser at $|X_1| = 8$.
- X_2 betegner mengden av strenger med nøyaktig 2 stk. 0-ere.
- Oppgave a) spør om $|X_k|$, det vil si antall elementer i X_k.

- Hva spør oppgave a) om?

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$
- Løsningen på a) blir derfor slik:

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$
- Løsningen på a) blir derfor slik:
- En streng i X_k har nøyaktig k antall 0-ere.

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$
- Løsningen på a) blir derfor slik:
- En streng i X_k har nøyaktig k antall 0-ere. Siden det er 8 bit i en streng, er antall strenger med k 0-ere lik antallet måter man kan velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på.

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at

$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

- Løsningen på a) blir derfor slik:
- En streng i X_k har nøyaktig k antall 0-ere. Siden det er 8 bit i en streng, er antall strenger med k 0-ere lik antallet måter man kan velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er $\binom{8}{k}$ måter å velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på.

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$
- Løsningen på a) blir derfor slik:
- En streng i X_k har nøyaktig k antall 0-ere. Siden det er 8 bit i en streng, er antall strenger med k 0-ere lik antallet måter man kan velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er $\binom{8}{k}$ måter å velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er derfor $\binom{8}{k}$ antall 8-bit strenger som har k 0-ere.

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$
- Løsningen på a) blir derfor slik:
- En streng i X_k har nøyaktig k antall 0-ere. Siden det er 8 bit i en streng, er antall strenger med k 0-ere lik antallet måter man kan velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er $\binom{8}{k}$ måter å velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er derfor $\binom{8}{k}$ antall 8-bit strenger som har k 0-ere. Derfor er $|X_k| = \binom{8}{k}$.

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at

$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

- Løsningen på a) blir derfor slik:
- En streng i X_k har nøyaktig k antall 0-ere. Siden det er 8 bit i en streng, er antall strenger med k 0-ere lik antallet måter man kan velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er $\binom{8}{k}$ måter å velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er derfor $\binom{8}{k}$ antall 8-bit strenger som har k 0-ere. Derfor er $|X_k| = \binom{8}{k}$. (Vi ser f.eks. at dette stemmer for $|X_0|$, som er lik $\binom{8}{0} = 1$, og $|X_1|$, som er lik $\binom{8}{1} = 8$.)

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om?

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
  - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
  - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)
  - For å finne ut hva E er, så må vi vite hvor mange 0-ere det er i s.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
  - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)
  - For å finne ut hva E er, så må vi vite hvor mange 0-ere det er i s. Det er 2 stk. 0-ere i s.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
  - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)
  - For å finne ut hva E er, så må vi vite hvor mange 0-ere det er i s. Det er 2 stk. 0-ere i s.
  - Hvilke t er R-relatert til s?

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
  - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)
  - For å finne ut hva E er, så må vi vite hvor mange 0-ere det er i s. Det er 2 stk. 0-ere i s.
  - Hvilke t er R-relatert til s? Vi har sRt når t har et antall 0-ere som er kongruente modulo 3 med 2.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
    - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
    - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
    - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
    - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)
    - For å finne ut hva E er, så må vi vite hvor mange 0-ere det er i s. Det er 2 stk. 0-ere i s.
    - Hvilke t er R-relatert til s? Vi har sRt når t har et antall 0-ere som er kongruente modulo 3 med 2.
    - Da har vi at $t \in E$ når t har 2, 5 eller 8 stk. 0-ere.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
  - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)
  - For å finne ut hva E er, så må vi vite hvor mange 0-ere det er i s. Det er 2 stk. 0-ere i s.
  - Hvilke t er R-relatert til s? Vi har sRt når t har et antall 0-ere som er kongruente modulo 3 med 2.
  - Da har vi at $t \in E$ når t har 2, 5 eller 8 stk. 0-ere.
  - Sagt på en annen måte: t er i E hvis t er i X_2, X_5 eller X_8.

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
  - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)
  - For å finne ut hva E er, så må vi vite hvor mange 0-ere det er i s. Det er 2 stk. 0-ere i s.
  - Hvilke t er R-relatert til s? Vi har sRt når t har et antall 0-ere som er kongruente modulo 3 med 2.
  - Da har vi at $t \in E$ når t har 2, 5 eller 8 stk. 0-ere.
  - Sagt på en annen måte: t er i E hvis t er i X_2, X_5 eller X_8.
  - På dette tidspunktet skal det ringe en bjelle: vi skal bruke informasjonen fra oppgave a).

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| =$.

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| =$.

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.
- Vi bruker inklusjons- og eksklusjonsprinsippet her, men siden mengdene ikke er overlappende, er det ikke nødvendig å bruke eksklusjon.

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.
- Vi bruker inklusjons- og eksklusjonsprinsippet her, men siden mengdene ikke er overlappende, er det ikke nødvendig å bruke eksklusjon.
- Vi får at $|E| =$

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.
- Vi bruker inklusjons- og eksklusjonsprinsippet her, men siden mengdene ikke er overlappende, er det ikke nødvendig å bruke eksklusjon.
- Vi får at $|E| = \binom{8}{2} + \binom{8}{5} + \binom{8}{8} =$

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.
- Vi bruker inklusjons- og eksklusjonsprinsippet her, men siden mengdene ikke er overlappende, er det ikke nødvendig å bruke eksklusjon.
- Vi får at $|E| = \binom{8}{2} + \binom{8}{5} + \binom{8}{8} = 28 + 56 + 1 =$

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.
- Vi bruker inklusjons- og eksklusjonsprinsippet her, men siden mengdene ikke er overlappende, er det ikke nødvendig å bruke eksklusjon.
- Vi får at $|E| = \binom{8}{2} + \binom{8}{5} + \binom{8}{8} = 28 + 56 + 1 = 85$.

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.
- Vi bruker inklusjons- og eksklusjonsprinsippet her, men siden mengdene ikke er overlappende, er det ikke nødvendig å bruke eksklusjon.
- Vi får at $|E| = \binom{8}{2} + \binom{8}{5} + \binom{8}{8} = 28 + 56 + 1 = 85$.
- Da har vi svart på oppgave b).

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.
- Vi bruker inklusjons- og eksklusjonsprinsippet her, men siden mengdene ikke er overlappende, er det ikke nødvendig å bruke eksklusjon.
- Vi får at $|E| = \binom{8}{2} + \binom{8}{5} + \binom{8}{8} = 28 + 56 + 1 = 85$.
- Da har vi svart på oppgave b).
- Jeg har riktignok skrevet en god del mer her enn det som trengs for en god besvarelse.

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t $[s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8]$

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t $[s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8]$
2. $a \leftarrow$ antall 0-ere i s

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t $[s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8]$
2. $a \leftarrow$ antall 0-ere i s
3. $b \leftarrow$ antall 0-ere i t

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t $[s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8]$
2. $a \leftarrow$ antall 0-ere i s
3. $b \leftarrow$ antall 0-ere i t
4. **If** $(a - b)$ er delelig med 3 **then**

   else

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t $[s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8]$
2. $a \leftarrow$ antall 0-ere i s
3. $b \leftarrow$ antall 0-ere i t
4. **If** $(a - b)$ er delelig med 3 **then**
   4.1. Output "de to strengene er i relasjon med hverandre"
   else

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t $[s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8]$
2. $a \leftarrow$ antall 0-ere i s
3. $b \leftarrow$ antall 0-ere i t
4. **If** $(a - b)$ er delelig med 3 **then**
    4.1. Output "de to strengene er i relasjon med hverandre"

    else

    4.2. Output "de to strengene er ikke i relasjon med hverandre"

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t $[s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8]$
2. $a \leftarrow$ antall 0-ere i s
3. $b \leftarrow$ antall 0-ere i t
4. **If** $(a - b)$ er delelig med 3 **then**
   4.1. Output "de to strengene er i relasjon med hverandre"
   else
   4.2. Output "de to strengene er ikke i relasjon med hverandre"

- Her kan både punkt 2, 3 og 4 gjøres mer detaljert.

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t $[s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8]$
2. $a \leftarrow$ antall 0-ere i s
3. $b \leftarrow$ antall 0-ere i t
4. **If** $(a - b)$ er delelig med 3 **then**
   4.1. Output "de to strengene er i relasjon med hverandre"
   else
   4.2. Output "de to strengene er ikke i relasjon med hverandre"

- Her kan både punkt 2, 3 og 4 gjøres mer detaljert.
- Det klarer dere på egenhånd.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 4

Eksamen 12/6-06 Oppgave 4

La m og n være naturlige tall der $2 \leq m \leq n \leq 3$, og la V være en mengde med $m + n$ elementer, la oss si $V = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 4

La m og n være naturlige tall der $2 \leq m \leq n \leq 3$, og la V være en mengde med $m + n$ elementer, la oss si $V = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$. Vi kan da danne en enkel graf $K_{m,n}$ med V som nodemengde ved å si at det finnes nøyaktig en kant mellom A_i og B_j for hver $1 \leq i \leq m$ og hver $1 \leq j \leq n$, og ingen kanter ellers.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 4

La m og n være naturlige tall der $2 \leq m \leq n \leq 3$, og la V være en mengde med $m + n$ elementer, la oss si $V = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$. Vi kan da danne en enkel graf $K_{m,n}$ med V som nodemengde ved å si at det finnes nøyaktig en kant mellom A_i og B_j for hver $1 \leq i \leq m$ og hver $1 \leq j \leq n$, og ingen kanter ellers.

(a) Lag en skisse av $K_{2,2}$, $K_{2,3}$ og $K_{3,3}$. Angi matrisen til $K_{2,3}$ (med hensyn på listingen A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 av nodene).

Eksamen 12/6-06 Oppgave 4

La m og n være naturlige tall der $2 \leq m \leq n \leq 3$, og la V være en mengde med $m + n$ elementer, la oss si $V = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$. Vi kan da danne en enkel graf $K_{m,n}$ med V som nodemengde ved å si at det finnes nøyaktig en kant mellom A_i og B_j for hver $1 \leq i \leq m$ og hver $1 \leq j \leq n$, og ingen kanter ellers.

(a) Lag en skisse av $K_{2,2}$, $K_{2,3}$ og $K_{3,3}$. Angi matrisen til $K_{2,3}$ (med hensyn på listingen A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 av nodene).

(b) Nøyaktig en av grafene fra a) er semi-Eulersk. Angi en Eulersti i denne grafen. En annen blant disse tre grafene er hverken Eulersk eller semi-Eulersk. Angi et utspennende tre for denne.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 4

La m og n være naturlige tall der $2 \leq m \leq n \leq 3$, og la V være en mengde med $m + n$ elementer, la oss si $V = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$. Vi kan da danne en enkel graf $K_{m,n}$ med V som nodemengde ved å si at det finnes nøyaktig en kant mellom A_i og B_j for hver $1 \leq i \leq m$ og hver $1 \leq j \leq n$, og ingen kanter ellers.

(a) Lag en skisse av $K_{2,2}$, $K_{2,3}$ og $K_{3,3}$. Angi matrisen til $K_{2,3}$ (med hensyn på listingen A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 av nodene).

(b) Nøyaktig en av grafene fra a) er semi-Eulersk. Angi en Eulersti i denne grafen. En annen blant disse tre grafene er hverken Eulersk eller semi-Eulersk. Angi et utspennende tre for denne.

[Denne løser vi på tavla/overhead.]

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z} \;\; (a^n - b^n = m(a - b))$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z} \;\; (a^n - b^n = m(a - b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z} \;\; (a^n - b^n = m(a - b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

(Hint: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$)

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z} \;\; (a^n - b^n = m(a-b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

(Hint: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$)

Løsning

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z} \;\; (a^n - b^n = m(a - b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

(Hint: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$)

Løsning

- For induksjonstarten, viser vi at $P(1)$ er sann.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \ \exists m \in \mathbb{Z} \ \ (a^n - b^n = m(a - b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

(Hint: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$)

Løsning

- For induksjonstarten, viser vi at $P(1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z} \;\; (a^n - b^n = m(a - b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

(Hint: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$)

Løsning

- For induksjonstarten, viser vi at $P(1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^n - b^n = m(a - b)$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z} \;\; (a^n - b^n = m(a - b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

(Hint: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$)

Løsning

- For induksjonstarten, viser vi at $P(1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^n - b^n = m(a - b)$.
- Ved å sette inn for n får vi $a^1 - b^1$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z} \;\; (a^n - b^n = m(a - b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

(Hint: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$)

Løsning

- For induksjonstarten, viser vi at $P(1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^n - b^n = m(a - b)$.
- Ved å sette inn for n får vi $a^1 - b^1$.
- Ved å la $m = 1$ får vi at dette er lik $m(a - b)$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$a^{k+1} - b^{k+1} =$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \text{ (dette er hintet)}$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \text{ (dette er hintet)} \\ &= a(a^k - b^k) + b^k(a-b) \end{aligned}$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \text{ (dette er hintet)} \\ &= a(a^k - b^k) + b^k(a-b) \\ &= am_1(a-b) + b^k(a-b) \end{aligned}$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$\begin{aligned}
a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \text{ (dette er hintet)} \\
&= a(a^k - b^k) + b^k(a-b) \\
&= am_1(a-b) + b^k(a-b) \text{ (siden } P(k) \text{ er sann)}
\end{aligned}$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$
\begin{aligned}
a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \text{ (dette er hintet)} \\
&= a(a^k - b^k) + b^k(a-b) \\
&= am_1(a-b) + b^k(a-b) \text{ (siden } P(k) \text{ er sann)} \\
&= (am_1 + b^k)(a-b)
\end{aligned}
$$

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \text{ (dette er hintet)} \\ &= a(a^k - b^k) + b^k(a-b) \\ &= am_1(a-b) + b^k(a-b) \text{ (siden } P(k) \text{ er sann)} \\ &= (am_1 + b^k)(a-b) \end{aligned}$$

- Ved å la $m = am_1 + b^k$ har vi vist induksjonsskrittet.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a-b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a-b)$.

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \text{ (dette er hintet)} \\ &= a(a^k - b^k) + b^k(a-b) \\ &= am_1(a-b) + b^k(a-b) \text{ (siden } P(k) \text{ er sann)} \\ &= (am_1 + b^k)(a-b) \end{aligned}$$

- Ved å la $m = am_1 + b^k$ har vi vist induksjonsskrittet.
- Ved induksjon følger det at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

(b) Vis at

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

(b) Vis at

$$t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} t(n)$$

for alle $n \geq 1$.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

(b) Vis at

$$t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} t(n)$$

for alle $n \geq 1$.

(c) Gi et induksjonsbevis for at

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

(b) Vis at

$$t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} t(n)$$

for alle $n \geq 1$.

(c) Gi et induksjonsbevis for at

$$t(n) \leq 4^n$$

for alle $n \geq 1$.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

(b) Vis at

$$t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} t(n)$$

for alle $n \geq 1$.

(c) Gi et induksjonsbevis for at

$$t(n) \leq 4^n$$

for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

(b) Vis at

$$t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} t(n)$$

for alle $n \geq 1$.

(c) Gi et induksjonsbevis for at

$$t(n) \leq 4^n$$

for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) = \binom{4}{2} =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$t(3) =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$t(3) = \binom{6}{3} =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$t(3) = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} =$$

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$t(3) = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

$$\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

$$\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

$$\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2(2n+1)!(n+1)}{(n+1)!n!} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

$$\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2(2n+1)!(n+1)}{(n+1)!n!(n+1)} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

$$\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2(2n+1)!(n+1)}{(n+1)!n!(n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

$$\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2(2n+1)!(n+1)}{(n+1)!n!(n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

$$\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2(2n+1)!(n+1)}{(n+1)!n!(n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$$

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n + 1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n + 1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n + 1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n + 1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.
  - Det vil si at $t(k + 1) \leq 4^{k+1}$.

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.
  - Det vil si at $t(k+1) \leq 4^{k+1}$.
- Vi regner på følgende måte:

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.
  - Det vil si at $t(k+1) \leq 4^{k+1}$.
- Vi regner på følgende måte:

$$t(k+1)$$

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n + 1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.
  - Det vil si at $t(k + 1) \leq 4^{k+1}$.
- Vi regner på følgende måte:

$$t(k+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(k)$$

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n + 1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.
  - Det vil si at $t(k + 1) \leq 4^{k+1}$.
- Vi regner på følgende måte:

$$t(k+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(k) \leq \frac{4n+2}{n+1} \cdot 4^k$$

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.
  - Det vil si at $t(k+1) \leq 4^{k+1}$.
- Vi regner på følgende måte:

$$t(k+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(k) \leq \frac{4n+2}{n+1} \cdot 4^k \leq \frac{4(n+1)}{n+1} \cdot 4^k$$

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.
  - Det vil si at $t(k+1) \leq 4^{k+1}$.
- Vi regner på følgende måte:

$$t(k+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(k) \leq \frac{4n+2}{n+1} \cdot 4^k \leq \frac{4(n+1)}{n+1} \cdot 4^k \leq 4 \cdot 4^k$$

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n+2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k+1$.
  - Det vil si at $t(k+1) \leq 4^{k+1}$.
- Vi regner på følgende måte:

$$t(k+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(k) \leq \frac{4n+2}{n+1} \cdot 4^k \leq \frac{4(n+1)}{n+1} \cdot 4^k \leq 4 \cdot 4^k = 4^{k+1}$$

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?

- Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?

- Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.
- Summen til gradene til de fire nodene som er angitt er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?

- Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.
- Summen til gradene til de fire nodene som er angitt er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
- Da må den siste noden ha grad 6.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?
  - Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.
  - Summen til gradene til de fire nodene som er angitt er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
  - Da må den siste noden ha grad 6.

(b) Er denne grafen et tre?

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?

- Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.
- Summen til gradene til de fire nodene som er angitt er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
- Da må den siste noden ha grad 6.

(b) Er denne grafen et tre?

- Nei, for i ethvert tre er antall kanter lik antall noder minus 1.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?

- Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.
- Summen til gradene til de fire nodene som er angitt er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
- Da må den siste noden ha grad 6.

(b) Er denne grafen et tre?

- Nei, for i ethvert tre er antall kanter lik antall noder minus 1.

(c) Finnes det en Eulervei i denne grafen?

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?
- Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.
- Summen til gradene til de fire nodene som er angitt er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
- Da må den siste noden ha grad 6.

(b) Er denne grafen et tre?
- Nei, for i ethvert tre er antall kanter lik antall noder minus 1.

(c) Finnes det en Eulervei i denne grafen?
- Vi har bevist et teorem som sier at det fins en Eulersti hvis det er nøyaktig to noder av odde grad i grafen.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?

- Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.
- Summen til gradene til de fire nodene som er angitt er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
- Da må den siste noden ha grad 6.

(b) Er denne grafen et tre?

- Nei, for i ethvert tre er antall kanter lik antall noder minus 1.

(c) Finnes det en Eulervei i denne grafen?

- Vi har bevist et teorem som sier at det fins en Eulersti hvis det er nøyaktig to noder av odde grad i grafen.
- Siden kun nodene med grad 1 og 3 har odde grad, så fins det en Eulersti i grafen.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

En enkel vektet graf G med noder A, B, C, D, E og F har følgende vektmatrise.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

En enkel vektet graf G med noder A, B, C, D, E og F har følgende vektmatrise.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A & B & C & D & E & F \\
A & 0 & 66 & \infty & 38 & \infty & 11 \\
B & 66 & 0 & 73 & \infty & 13 & \infty \\
C & \infty & 73 & 0 & 42 & \infty & 20 \\
D & 38 & \infty & 42 & 0 & 91 & \infty \\
E & \infty & 13 & \infty & 91 & 0 & 93 \\
F & 11 & \infty & 20 & \infty & 93 & 0
\end{array}$$

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

En enkel vektet graf G med noder A, B, C, D, E og F har følgende vektmatrise.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & A & B & C & D & E & F \\
A & 0 & 66 & \infty & 38 & \infty & 11 \\
B & 66 & 0 & 73 & \infty & 13 & \infty \\
C & \infty & 73 & 0 & 42 & \infty & 20 \\
D & 38 & \infty & 42 & 0 & 91 & \infty \\
E & \infty & 13 & \infty & 91 & 0 & 93 \\
F & 11 & \infty & 20 & \infty & 93 & 0
\end{array}
$$

For eksempel er det en kant AB mellom A og B, med vekt 66, mens det ikke er noen kant i G mellom A og C.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

(a) Tegn et bilde av denne grafen, der hjørnene er merket A til F og hver kant AB, AD, etc., er merket med den tilhørende vekten.
Hint: Noen av kantene må krysse hverandre i dette bildet. Tegn opp grafen en gang til for å besvare 3(b).

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

(a) Tegn et bilde av denne grafen, der hjørnene er merket A til F og hver kant AB, AD, etc., er merket med den tilhørende vekten.
Hint: Noen av kantene må krysse hverandre i dette bildet. Tegn opp grafen en gang til for å besvare 3(b).

(b) Bruk Prims algoritme til å finne et minimalt utspennende tre T for G. Svaret skal være en liste av de kantene i G som er med i T, der f.eks. kanten mellom A og B heter AB.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

(a) Tegn et bilde av denne grafen, der hjørnene er merket A til F og hver kant AB, AD, etc., er merket med den tilhørende vekten.
Hint: Noen av kantene må krysse hverandre i dette bildet. Tegn opp grafen en gang til for å besvare 3(b).

(b) Bruk Prims algoritme til å finne et minimalt utspennende tre T for G. Svaret skal være en liste av de kantene i G som er med i T, der f.eks. kanten mellom A og B heter AB.

[Denne løser vi på tavla/overhead.]

Siste plenumsregning

Siste plenumsregning

Det var siste plenumsregning.

Siste plenumsregning

Det var siste plenumsregning.

Vi avslutter med diskusjon og eventuelle spørsmål!

Siste plenumsregning

Det var siste plenumsregning.

Vi avslutter med diskusjon og eventuelle spørsmål!

Lykke til på eksamen!