MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 12: Diverse oppgaver

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

22. mai 2008

Plan

- Dette er siste plenumsregning.
- Vi regner stort sett eksamensoppgaver.
- Neste uke blir det repetisjon på mandag og onsdag.
- Send epost til Dag eller meg med eventuelle ønsker om hva dere vil ha gjennomgått.
- Bruk orakeltjenestene!
  - Sted: Rom B534 i Niels Henrik Abels hus
  - Tider:
    - Tirsdag 27/5 12-14
    - Onsdag 28/5 10-12
    - Tirsdag 3/6 12-14
    - Onsdag 4/6 12-14
- Jeg lager et løsningsforslag til ekstraoppgavene (Oppgavesett 4) og legger det ut i begynnelsen av neste uke.

Noen tips til eksamen

- Vær effektive og ikke bli sittende og tenke altfor lenge på hver oppgave.
  - Det vil si, ikke få panikk hvis noe er litt for vanskelig ved første øyekast. Gå heller tilbake til oppgaven litt senere.
- Øv på å løse oppgaver og skrive bevis.
  - Ikke la eksamen være første gangen.
- Les oppgaveteksten nøye og svar på det som det spørres etter.
  - Ja, det er lurt å lese gjennom hele oppgavesettet først.
- Hvis du står fast, vis i hvert fall hva du har forstått. Den som retter en eksamen er ute etter å finne ut hva kandidaten *har forstått*.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 2

La X være mengden som består av alle 8-bit strenger med 0-er og 1-ere. For $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 8$, definer $X_k = \{s \in X \mid \text{ antall 0-er i } s \text{ er lik } k\}$.

(a) Begrunn at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$

(b) Vi definerer en relasjon R på X ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-er i t. Du kan ta det for gitt at dette er en ekvivalensrelasjon. La E betegne ekvivalensklassen til $s = 11011011$. Beregn $|E|$.

(c) Skriv pseudokoden for en algoritme som avgjør om to elementer i X er i relasjon med hverandre eller ikke (med hensyn på relasjonen definert i b)). Input antas å være to 8-bit strenger $s_1 \cdots s_8$ og $t_1 \cdots t_8$, mens output skal være "de to strengene er i relasjon med hverandre" eller "de to strengene er ikke i relasjon med hverandre".

Vi danner oss først et bilde av hva oppgaven snakker om.

- Alle strengene i X består av 8 bit.
- Alt i alt er det derfor $2^8 = 256$ strenger i X, eller skrevet på en annen måte, $|X| = 256$.
- X_0 betegner mengden av strenger uten 0-ere.
- X_1 betegner mengden av strenger med nøyaktig 1 stk. 0-er:
  - 01111111
  - 10111111
  - 11011111
  - 11101111
  - 11110111
  - 11111011
  - 11111101
  - 11111110
- Vi ser at $|X_1| = 8$.
- X_2 betegner mengden av strenger med nøyaktig 2 stk. 0-ere.
- Oppgave a) spør om $|X_k|$, det vil si antall elementer i X_k.

- Hva spør oppgave a) om? Den spør om en begrunnelse.
- Vi skal begrunne at
$$|X_k| = \binom{8}{k}$$
- Løsningen på a) blir derfor slik:
- En streng i X_k har nøyaktig k antall 0-ere. Siden det er 8 bit i en streng, er antall strenger med k 0-ere lik antallet måter man kan velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er $\binom{8}{k}$ måter å velge k elementer fra en mengde med 8 elementer på. Det er derfor $\binom{8}{k}$ antall 8-bit strenger som har k 0-ere. Derfor er $|X_k| = \binom{8}{k}$. (Vi ser f.eks. at dette stemmer for $|X_0|$, som er lik $\binom{8}{0} = 1$, og $|X_1|$, som er lik $\binom{8}{1} = 8$.)

- Relasjonen R på X er definert ved at sRt hvis og bare hvis antall 0-er i s er kongruent modulo 3 med antall 0-ere i t.
- Hva betyr det?
  - "kongruent modulo 3" betyr at differansen er delelig med 3.
  - F.eks. er 1 og 7 kongruente modulo 3, siden $7 - 1 = 6$ er delelig med 3.
- Hva ber oppgave b) om? Den ber oss om å beregne $|E|$, hvor E er ekvivalensklassen til $s = 11011011$.
  - For å finne $|E|$, antallet elementer i E, er det lurt å først finne mengden E.
  - E er mengden av strenger t slik at sRt. (Det er *definisjonen* av en ekvivalensklasse.)
  - For å finne ut hva E er, så må vi vite hvor mange 0-ere det er i s. Det er 2 stk. 0-ere i s.
  - Hvilke t er R-relatert til s? Vi har sRt når t har et antall 0-ere som er kongruente modulo 3 med 2.
  - Da har vi at $t \in E$ når t har 2, 5 eller 8 stk. 0-ere.
  - Sagt på en annen måte: t er i E hvis t er i X_2, X_5 eller X_8.
  - På dette tidspunktet skal det ringe en bjelle: vi skal bruke informasjonen fra oppgave a).

- Vi har at $E = X_2 \cup X_5 \cup X_8$.
- Dermed får vi $|E| = |X_2 \cup X_5 \cup X_8| = |X_2| + |X_5| + |X_8|$.
- Vi bruker inklusjons- og eksklusjonsprinsippet her, men siden mengdene ikke er overlappende, er det ikke nødvendig å bruke eksklusjon.
- Vi får at $|E| = \binom{8}{2} + \binom{8}{5} + \binom{8}{8} = 28 + 56 + 1 = 85$.
- Da har vi svart på oppgave b).
- Jeg har riktignok skrevet en god del mer her enn det som trengs for en god besvarelse.

- Oppgave c) ber om en pseudokode for å avgjøre om to elementer i X er i relasjonen R med hverandre eller ikke.

1. Input s, t [$s = s_1 \cdots s_8$ og $t = t_1 \cdots t_8$]
2. $a \leftarrow$ antall 0-ere i s
3. $b \leftarrow$ antall 0-ere i t
4. **If** $(a - b)$ er delelig med 3 **then**
   4.1. Output "de to strengene er i relasjon med hverandre"
   else
   4.2. Output "de to strengene er ikke i relasjon med hverandre"

- Her kan både punkt 2, 3 og 4 gjøres mer detaljert.
- Det klarer dere på egenhånd.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 4

La m og n være naturlige tall der $2 \leq m \leq n \leq 3$, og la V være en mengde med $m + n$ elementer, la oss si $V = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$. Vi kan da danne en enkel graf $K_{m,n}$ med V som nodemengde ved å si at det finnes nøyaktig en kant mellom A_i og B_j for hver $1 \leq i \leq m$ og hver $1 \leq j \leq n$, og ingen kanter ellers.

(a) Lag en skisse av $K_{2,2}$, $K_{2,3}$ og $K_{3,3}$. Angi matrisen til $K_{2,3}$ (med hensyn på listingen A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 av nodene).

(b) Nøyaktig en av grafene fra a) er semi-Eulersk. Angi en Eulersti i denne grafen. En annen blant disse tre grafene er hverken Eulersk eller semi-Eulersk. Angi et utspennende tre for denne.

[Denne løser vi på tavla/overhead.]

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

For $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ være følgende påstand:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \ \exists m \in \mathbb{Z} \ \ (a^n - b^n = m(a - b))$$

Vis at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

(Hint: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$)

Løsning

- For induksjonstarten, viser vi at $P(1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^n - b^n = m(a - b)$.
- Ved å sette inn for n får vi $a^1 - b^1$.
- Ved å la $m = 1$ får vi at dette er lik $m(a - b)$.

Eksamen 12/6-06 Oppgave 5

- For induksjonsskrittet, så antar vi at $P(k)$ er sann for $k \in \mathbb{N}$.
- Vi må vise at $P(k+1)$ er sann.
- La $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Siden $P(k)$ er sann, fins det en m_1 slik at $a^k - b^k = m_1(a - b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at det fins en m slik at $a^{k+1} - b^{k+1} = m(a - b)$.

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \text{ (dette er hintet)} \\ &= a(a^k - b^k) + b^k(a - b) \\ &= am_1(a - b) + b^k(a - b) \text{ (siden } P(k) \text{ er sann)} \\ &= (am_1 + b^k)(a - b) \end{aligned}$$

- Ved å la $m = am_1 + b^k$ har vi vist induksjonsskrittet.
- Ved induksjon følger det at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 1

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

(b) Vis at

$$t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} t(n)$$

for alle $n \geq 1$.

(c) Gi et induksjonsbevis for at

$$t(n) \leq 4^n$$

for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3.

$$t(1) = \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t(2) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$t(3) = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

b)

$$\text{Vis at} \quad t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Vi merker oss at $t(n+1) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$ per definisjon.

$$\frac{4n+2}{n+1} \cdot t(n) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(4n+2)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} =$$

$$\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2(2n+1)!(n+1)}{(n+1)!n!(n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$$

c) Gi et induksjonsbevis for at $t(n) \leq 4^n$ for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n + 2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonsskrittet.

- For induksjonstarten, viser vi at påstanden er sann for $n = 1$:
  - $t(1) = 2$, fra a), og $2 \leq 4^1 = 4$.
- For induksjonsskrittet, antar vi at påstanden holder for k.
  - Det vil si at $t(k) \leq 4^k$.
- Vi må vise at påstanden holder for $k + 1$.
  - Det vil si at $t(k+1) \leq 4^{k+1}$.
- Vi regner på følgende måte:

$$t(k+1) = \frac{4n+2}{n+1} \cdot t(k) \leq \frac{4n+2}{n+1} \cdot 4^k \leq \frac{4(n+1)}{n+1} \cdot 4^k \leq 4 \cdot 4^k = 4^{k+1}$$

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 2

En sammenhengende graf har 5 noder og 8 kanter. De fire første nodene har grad 1, 2, 3 og 4.

(a) Hva er graden til det femte hjørnet?
  - Siden antallet kanter er 8, må summen til gradene til nodene være 16.
  - Summen til gradene til de fire nodene som er angitt er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
  - Da må den siste noden ha grad 6.

(b) Er denne grafen et tre?
  - Nei, for i ethvert tre er antall kanter lik antall noder minus 1.

(c) Finnes det en Eulervei i denne grafen?
  - Vi har bevist et teorem som sier at det fins en Eulersti hvis det er nøyaktig to noder av odde grad i grafen.
  - Siden kun nodene med grad 1 og 3 har odde grad, så fins det en Eulersti i grafen.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

En enkel vektet graf G med noder A, B, C, D, E og F har følgende vektmatrise.

	A	B	C	D	E	F
A	0	66	∞	38	∞	11
B	66	0	73	∞	13	∞
C	∞	73	0	42	∞	20
D	38	∞	42	0	91	∞
E	∞	13	∞	91	0	93
F	11	∞	20	∞	93	0

For eksempel er det en kant AB mellom A og B, med vekt 66, mens det ikke er noen kant i G mellom A og C.

Eksamen 31/5-2005 Oppgave 3

(a) Tegn et bilde av denne grafen, der hjørnene er merket A til F og hver kant AB, AD, etc., er merket med den tilhørende vekten.
Hint: Noen av kantene må krysse hverandre i dette bildet. Tegn opp grafen en gang til for å besvare 3(b).

(b) Bruk Prims algoritme til å finne et minimalt utspennende tre T for G. Svaret skal være en liste av de kantene i G som er med i T, der f.eks. kanten mellom A og B heter AB.

[Denne løser vi på tavla/overhead.]

Siste plenumsregning

Det var siste plenumsregning.

Vi avslutter med diskusjon og eventuelle spørsmål!

Lykke til på eksamen!