

# MAT1030 – Diskret matematikk

## Plenumsregning 2: Ukeoppgaver fra kapittel 1 & 2

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

24. januar 2008



### Oppgave 1.1

Modifiser algoritmen fra 1.2.1 slik at den også returnerer posisjonen i listen hvor det minste tallet forekommer.

### Løsning

1. Input the number of values  $n$
2. Input the list of numbers  $x_1, \dots, x_n$
3.  $min \leftarrow x_1$
4.  $posisjon \leftarrow 1$
5. **For**  $i = 2$  **to**  $n$  **do**
  - 5.1. **If**  $x_i < min$  **then**
    - 5.1.1.  $min \leftarrow x_i$
    - 5.1.2.  $posisjon \leftarrow i$
6. Output  $min, posisjon$

### Oppgave 1.3

Skriv en algoritme som tar som input et tall  $n$  og som regner ut

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

### Løsning

1. Input  $n$
2.  $sum \leftarrow 0$
3. **For**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**
  - 3.1.  $sum \leftarrow sum + i^2$
4. Output  $sum$

### Oppgave 1.6

Skriv en algoritme som tar en liste av tall, som sjekker om tallenes størrelse øker og som returnerer en passende melding. Algoritmen skal designes slik at sjekkingen stopper med en gang svaret er gitt.

## Løsning

1. Input  $x_1, \dots, x_n$  [ $n \geq 1$ ]
2.  $i \leftarrow 1$
3.  $stigende \leftarrow \text{true}$
4. **While**  $i < n$  and  $stigende$  **do**
  - 4.1. **If**  $x_i > x_{i+1}$  **then**
    - 4.1.1.  $stigende \leftarrow \text{false}$
  - 4.2.  $i \leftarrow i + 1$
5. **If**  $stigende$  **then**
  - 5.1. Output 'Tallene er i stigende rekkefølge'**else**
  - 5.1. Output 'Tallene er ikke i stigende rekkefølge'

## Oppgave 1.9

1. Input  $n$  [ $n \geq 0$ ]
  2.  $i \leftarrow 0$
  3. **While**  $n$  er partall **do**
    - 3.1.  $n \leftarrow n/2$
    - 3.2.  $i \leftarrow i + 1$
  4. Output  $i$
- (a) Hva returnerer algoritmen når 12 er input?  
(b) Hva returnerer algoritmen når input er et oddetall?  
(c) Hva skjer når 0 er input?  
(d) Er denne sekvensen av steg en algoritme?

## Oppgave 1.9

1. Input  $n$  [ $n \geq 0$ ]
  2.  $i \leftarrow 0$
  3. **While**  $n$  er partall **do**
    - 3.1.  $n \leftarrow n/2$
    - 3.2.  $i \leftarrow i + 1$
  4. Output  $i$
- (a) Hva returnerer algoritmen når 12 er input?

## Løsning (a)

Steg	$n$	$i$
1	12	–
2	12	0
3	12	0
3.1	6	0
3.2	6	1
3	6	1
3.1	3	1
3.2	3	2
3	3	2
4	3	2

Svar (a): 2

## Oppgave 1.9

1. Input  $n$  [ $n \geq 0$ ]
  2.  $i \leftarrow 0$
  3. **While**  $n$  er partall **do**
    - 3.1.  $n \leftarrow n/2$
    - 3.2.  $i \leftarrow i + 1$
  4. Output  $i$
- (b) Hva returnerer algoritmen når input er et oddetall?

## Løsning (b)

Steg	$n$	$i$
1	oddetall	–
2	oddetall	0
3	oddetall	0
4	oddetall	0

Svar (b): 0

### Oppgave 1.9

1. Input  $n$  [ $n \geq 0$ ]
2.  $i \leftarrow 0$
3. **While**  $n$  er partall **do**
  - 3.1.  $n \leftarrow n/2$
  - 3.2.  $i \leftarrow i + 1$
4. Output  $i$

- (c) Hva skjer når 0 er input?  
(d) Er denne sekvensen av steg en algoritme?

### Løsning (c og d)

Steg	$n$	$i$
1	0	–
2	0	0
3	0	0
3.1	0	0
3.2	0	1
3	0	1
3.1	0	1
3.2	0	2
3	0	2
3.1	0	2
3.2	0	3
		$\vdots$

Svar (c): Den terminerer ikke.

Svar (d): Nei.

### Oppgave 1.10

1. Input  $n$  [ $n \geq 0$ ]
2.  $answer \leftarrow n$
3. **While**  $n > 1$  **do**
  - 3.1.  $n \leftarrow n - 1$
  - 3.2.  $answer \leftarrow answer \times n$
4. Output  $answer$

- (a) Lag en kjøringstabell som viser hva som skjer når 4 er input.  
(b) Er denne sekvensen av steg en algoritme? Begrunn svaret.

### Løsning (a)

Steg	$n$	$answer$
1	4	–
2	4	4
3	4	4
3.1	3	4
3.2	3	12
3	3	12
3.1	2	12
3.2	2	24
3	2	24
3.1	1	24
3.2	1	24
4	1	24

### Oppgave 1.10

1. Input  $n$  [ $n \geq 0$ ]
2.  $answer \leftarrow n$
3. **While**  $n > 1$  **do**
  - 3.1.  $n \leftarrow n - 1$
  - 3.2.  $answer \leftarrow answer \times n$
4. Output  $answer$

- (a) Lag en kjøringstabell som viser hva som skjer når 4 er input.  
(b) Er denne sekvensen av steg en algoritme? Begrunn svaret.

### Løsning (b)

Ja, dette er en algoritme. Stegene er tydelig og utvetydig definert. Sekvensen av steg er veldefinert og vil alltid terminere, siden steg 3 aldri blir utført mer enn  $n - 1$  ganger.

### Oppgave 1.12

1. Input  $n$  [ $n \geq 0$ ]
  2. **For**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**
    - 2.1.  $a_i \leftarrow 0$
  3. **For**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**
    - 3.1. **For**  $j = 1$  **to**  $n$  **do**
      - 3.1.1. **If**  $j$  kan deles på  $i$  **then**
        - 3.1.1.1.  $a_j \leftarrow 1 - a_j$   
[ $a_j$  er alltid enten 0 eller 1]
4. **For**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**
  - 4.1. Output  $a_i$

### Løsning (a)

1. gang 1111111111
2. gang 1010101010
3. gang 1000111000
4. gang 1001111100
5. gang 1001011101
6. gang 1001001101
7. gang 1001000101
8. gang 1001000001
9. gang 1001000011
10. gang 1001000010

### Oppgave 1.12

1. Input  $n$  [ $n \geq 0$ ]
2. **For**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**
  - 2.1.  $a_i \leftarrow 0$
3. **For**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**
  - 3.1. **For**  $j = 1$  **to**  $n$  **do**
    - 3.1.1. **If**  $j$  kan deles på  $i$  **then**
      - 3.1.1.1.  $a_j \leftarrow 1 - a_j$   
[ $a_j$  er alltid enten 0 eller 1]
4. **For**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**
  - 4.1. Output  $a_i$

### Løsning (b)

$a_j = 1$  nøyaktig når  $j$  er et kvadrattall. Grunnen er at det er kun kvadrattall som har et odde antall divisorer.

### Oppgave 2.2

Overfør følgende binære tall til desimaltall ved å først skrive dem på ekspandert form.

- (a)  $1100101_2$
- (b)  $1010111, 1011_2$

### Løsning

- (a)  $1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 4 + 1 = 101$
- (b)  $1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = 64 + 16 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 87,6875$   
Algoritmen fra forelesningen gir for (a):  
 $0 \xrightarrow{\cdot 2+1} 1 \xrightarrow{\cdot 2+1} 3 \xrightarrow{\cdot 2+0} 6 \xrightarrow{\cdot 2+0} 12 \xrightarrow{\cdot 2+1} 25 \xrightarrow{\cdot 2+0} 50 \xrightarrow{\cdot 2+1} 101$

### Oppgave 2.3

Overfør følgende tall fra desimal til binær form.

- (a)  $826_{10}$
- (b)  $0,34375_{10}$
- (c)  $1604,175_{10}$
- (d)  $-471,25_{10}$

### Repetisjon fra boka

- $n \text{ div } 2$  er *kvotienten* når  $n$  deles med 2
- $n \text{ mod } 2$  er *resten* når  $n$  er deles med 2

### Eksempel

$12 \text{ div } 2 = 6$	$13 \text{ div } 2 = 6$
$12 \text{ mod } 2 = 0$	$13 \text{ mod } 2 = 1$

### Algoritme for å overføre fra desimal til binær form (baklengs)

1. Input  $n$  [ $n$  et naturlig tall]
2. **Repeat**
  - 2.1. Output  $n \text{ mod } 2$
  - 2.2.  $n \leftarrow n \text{ div } 2$
- until**  $n = 0$

## Eksempel

$$\begin{array}{r}
 2 \ 8 \\
 4 \ 0 \\
 2 \ 0 \\
 1 \ 0 \\
 \hline
 0 \ 1 \\
 \hline
 8_{10} = 1000_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \ 7 \\
 3 \ 1 \\
 1 \ 1 \\
 0 \ 1 \\
 \hline
 7_{10} = 111_2
 \end{array}$$

## Løsning (a) ( $826_{10}$ )

$$\begin{array}{r}
 2 \ 826 \\
 413 \ 0 \\
 206 \ 1 \\
 103 \ 0 \\
 51 \ 1 \\
 25 \ 1 \\
 12 \ 1 \\
 6 \ 0 \\
 3 \ 0 \\
 1 \ 1 \\
 0 \ 1 \\
 \hline
 826_{10} = 1100111010_2
 \end{array}$$

## Mer repetisjon fra boka

- Anta at vi vil finne den binære formen til  $0,375_{10}$ .
- Siden  $0,375$  er mindre enn  $0,5$  vil første bit etter komma være  $0$ .
- Siden  $2 \cdot 0,375$  er mindre enn  $1$  vil første bit etter komma være  $0$ .
- $\lfloor n \rfloor$  er heltallsdelen av  $n$
- $\text{frac}(n)$  er  $n$  minus heltallsdelen av  $n$

Første bit i den binære formen til  $n$  er heltallsdelen av  $2n$ .

## Eksempel

$$\begin{array}{ll}
 \lfloor 2,7 \rfloor = 2 & 0,5_{10} = 0,1_2 \\
 \text{frac}(2,7) = 0,7 & 0,25_{10} = 0,01_2 \\
 & 0,75_{10} = 0,11_2
 \end{array}$$

## Utkast til algoritme

1. Input  $n$  [ $0 \leq n \leq 1$ ]
2. **Repeat**
  - 2.1.  $m \leftarrow 2n$
  - 2.2. Output  $\lfloor m \rfloor$
  - 2.3.  $n \leftarrow \text{frac}(m)$
- until**  $n = 0$

*Hva hvis  $n = 0$  aldri inntreffer?*

## Eksempel

$$\begin{array}{r}
 ,25 \ 2 \\
 0 \ ,5 \\
 1 \ ,0 \\
 \hline
 0,25_{10} = 0,01_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 ,375 \ 2 \\
 0 \ ,75 \\
 1 \ ,5 \\
 1 \ ,0 \\
 \hline
 0,375_{10} = 0,011_2
 \end{array}$$

- Vi kan velge hvor nøyaktig vi vil ha svaret.

### Algoritme

1. Input  $n, \text{sifre}$  [ $0 \leq n \leq 1, \text{sifre} \geq 1, \text{sifre}$  heltall]
  2.  $i \leftarrow 0$
  3. **Repeat**
    - 3.1.  $i \leftarrow i + 1$
    - 3.2.  $m \leftarrow 2n$
    - 3.3. Output  $\lfloor m \rfloor$
    - 3.4.  $n \leftarrow \text{frac}(m)$
- until**  $n = 0$  or  $i = \text{sifre}$

### Løsning (b) ( $0,34375_{10}$ )

$$\begin{array}{r}
 \phantom{0,}34375 \quad 2 \\
 0 \phantom{,}6875 \\
 1 \phantom{,}375 \\
 0 \phantom{,}75 \\
 1 \phantom{,}5 \\
 1 \phantom{,}0 \\
 \hline
 0,34375_{10} = 0,01011_2
 \end{array}$$

### Løsning (c) ( $1604,175_{10}$ )

$$\begin{array}{r}
 2 \ 1604 \\
 802 \ 0 \\
 401 \ 0 \\
 200 \ 1 \\
 100 \ 0 \\
 50 \ 0 \\
 25 \ 0 \\
 12 \ 1 \\
 6 \ 0 \\
 3 \ 0 \\
 1 \ 1 \\
 0 \ 1 \\
 \hline
 1604_{10} = 11001000100_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \phantom{0,}1875 \quad 2 \\
 0 \phantom{,}375 \\
 0 \phantom{,}75 \\
 1 \phantom{,}5 \\
 1 \phantom{,}0 \\
 \hline
 0,1875_{10} = 0,0011_2
 \end{array}$$

Svar:  $11001000100,0011_2$

### Løsning (d) ( $-471,25_{10}$ )

$$\begin{array}{r}
 2 \ 471 \\
 235 \ 1 \\
 117 \ 1 \\
 58 \ 1 \\
 29 \ 0 \\
 14 \ 1 \\
 7 \ 0 \\
 3 \ 1 \\
 1 \ 1 \\
 0 \ 1 \\
 \hline
 471_{10} = 111010111_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \phantom{0,}25 \quad 2 \\
 0 \phantom{,}5 \\
 1 \phantom{,}0 \\
 \hline
 0,25_{10} = 0,01_2
 \end{array}$$

Svar:  $-111010111,01_2$

### Oppgave 2.4

Overfør følgende tall fra desimal til binær form, med 5 siffer etter komma.

- (a)  $0,2_{10}$
- (b)  $13,47_{10}$

#### Løsning (a)

$$\begin{array}{r} \phantom{0,}2 \phantom{2} \\ 0,4 \\ 0,8 \\ 1,6 \\ 1,2 \\ 0,4 \\ \hline 0,2_{10} = 0,00110_2 \end{array}$$

### Oppgave 2.4

Overfør følgende tall fra desimal til binær form, med 5 siffer etter komma.

- (a)  $0,2_{10}$
- (b)  $13,47_{10}$

#### Løsning (b)

$$\begin{array}{r} 2 \phantom{13} \\ 6 \phantom{1} \\ 3 \phantom{0} \\ 1 \phantom{1} \\ 0 \phantom{1} \\ \hline 13_{10} = 1101_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \phantom{0,}47 \phantom{2} \\ 0,94 \\ 1,88 \\ 1,76 \\ 1,52 \\ 1,04 \\ \hline 0,2_{10} = 0,01111_2 \end{array}$$

Svar:  $1101,01111_2$

### Oppgave 2.5

Hva er resultatet på verdien til et naturlig tall hvis

- (a) 0 legges til dets binære representasjon?
- (b) 1 legges til dets binære representasjon?

#### Løsning

- (a) Tallet blir fordoblet.
- (b) Tallet blir fordoblet og økt med 1.