MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 2: Ukeoppgaver fra kapittel 1 & 2

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

24. januar 2008

Oppgave 1.1

Modifiser algoritmen fra 1.2.1 slik at den også returnerer posisjonen i listen hvor det minste tallet forekommer.

Løsning

1. Input the number of values n
2. Input the list of numbers $x_1, \ldots, x_n$
3. $min \leftarrow x_1$
4. $\underline{posisjon \leftarrow 1}$
5. **For** $i = 2$ **to** n **do**
    - 5.1. **If** $x_i < min$ **then**
        - 5.1.1. $min \leftarrow x_i$
        - 5.1.2. $\underline{posisjon \leftarrow i}$
6. Output $min, posisjon$

Oppgave 1.3

Skriv en algoritme som tar som input et tall n og som regner ut

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Løsning

1. Input n
2. $sum \leftarrow 0$
3. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   3.1. $sum \leftarrow sum + i^2$
4. Output sum

Oppgave 1.6

Skriv en algoritme som tar en liste av tall, som sjekker om tallenes størrelse øker og som returnerer en passende melding. Algoritmen skal designes slik at sjekkingen stopper med en gang svaret er gitt.

Løsning

1. Input $x_1, \ldots, x_n$ $[n \geq 1]$
2. $i \leftarrow 1$
3. *stigende* $\leftarrow$ true
4. **While** $i < n$ **and** *stigende* **do**
    4.1. **If** $x_i > x_{i+1}$ **then**
        4.1.1. *stigende* $\leftarrow$ false
    4.2. $i \leftarrow i + 1$
5. **If** *stigende* **then**
    5.1. Output 'Tallene er i stigende rekkefølge'
    else
    5.1. Output 'Tallene er ikke i stigende rekkefølge'

Oppgave 1.9

1. Input n [$n \geq 0$]
2. $i \leftarrow 0$
3. **While** n er partall **do**
   3.1. $n \leftarrow n/2$
   3.2. $i \leftarrow i + 1$
4. Output i

(a) Hva returnerer algoritmen når 12 er input?

(b) Hva returnerer algoritmen når input er et oddetall?

(c) Hva skjer når 0 er input?

(d) Er denne sekvensen av steg en algoritme?

Oppgave 1.9

1. Input n $[n \geq 0]$
2. $i \leftarrow 0$
3. **While** n er partall **do**
   3.1. $n \leftarrow n/2$
   3.2. $i \leftarrow i + 1$
4. Output i

(a) Hva returnerer algoritmen når 12 er input?

Løsning (a)

Steg	n	i
1	12	–
2	12	0
3	12	0
3.1	6	0
3.2	6	1
3	6	1
3.1	3	1
3.2	3	2
3	3	2
4	3	2

Svar (a): 2

Oppgave 1.9

1. Input n $[n \geq 0]$
2. $i \leftarrow 0$
3. **While** n er partall **do**
   3.1. $n \leftarrow n/2$
   3.2. $i \leftarrow i + 1$
4. Output i

(b) Hva returnerer algoritmen når input er et oddetall?

Løsning (b)

Steg	n	i
1	oddetall	–
2	oddetall	0
3	oddetall	0
4	oddetall	0

Svar (b): 0

Oppgave 1.9

1. Input n [$n \geq 0$]
2. $i \leftarrow 0$
3. **While** n er partall **do**
   3.1. $n \leftarrow n/2$
   3.2. $i \leftarrow i + 1$
4. Output i

(c) Hva skjer når 0 er input?

(d) Er denne sekvensen av steg en algoritme?

Løsning (c og d)

Steg	n	i
1	0	–
2	0	0
3	0	0
3.1	0	0
3.2	0	1
3	0	1
3.1	0	1
3.2	0	2
3	0	2
3.1	0	2
3.2	0	3
	$\vdots$	

Svar (c): Den terminerer ikke.
Svar (d): Nei.

Oppgave 1.10

1. Input n $[n \geq 0]$
2. $answer \leftarrow n$
3. **While** $n > 1$ **do**
   3.1. $n \leftarrow n - 1$
   3.2. $answer \leftarrow answer \times n$
4. Output *answer*

(a) Lag en kjøringstabell som viser hva som skjer når 4 er input.

(b) Er denne sekvensen av steg en algoritme? Begrunn svaret.

Løsning (a)

Steg	n	*answer*
1	4	–
2	4	4
3	4	4
3.1	3	4
3.2	3	12
3	3	12
3.1	2	12
3.2	2	24
3	2	24
3.1	1	24
3.2	1	24
4	1	24

Oppgave 1.10

1. Input n $[n \geq 0]$
2. $answer \leftarrow n$
3. **While** $n > 1$ **do**
   - 3.1. $n \leftarrow n - 1$
   - 3.2. $answer \leftarrow answer \times n$
4. Output *answer*

(a) Lag en kjøringstabell som viser hva som skjer når 4 er input.

(b) Er denne sekvensen av steg en algoritme? Begrunn svaret.

Løsning (b)

Ja, dette er en algoritme. Stegene er tydelig og utvetydig definert. Sekvensen av steg er veldefinert og vil alltid terminere, siden steg 3 aldri blir utført mer enn $n - 1$ ganger.

Oppgave 1.12

1. Input n [$n \geq 0$]
2. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   2.1. $a_i \leftarrow 0$
3. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   3.1. **For** $j = 1$ **to** n **do**
      3.1.1. **If** j kan deles på i **then**
         3.1.1.1. $a_j \leftarrow 1 - a_j$
         [a_j er alltid enten 0 eller 1]
4. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   4.1. Output a_i

Løsning (a)

1. gang	1111111111
2. gang	1010101010
3. gang	1000111000
4. gang	1001111100
5. gang	1001011101
6. gang	1001001101
7. gang	1001000101
8. gang	1001000001
9. gang	1001000011
10. gang	1001000010

Oppgave 1.12

1. Input n [$n \geq 0$]
2. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   2.1. $a_i \leftarrow 0$
3. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   3.1. **For** $j = 1$ **to** n **do**
      3.1.1. **If** j kan deles på i **then**
         3.1.1.1. $a_j \leftarrow 1 - a_j$
         [a_j er alltid enten 0 eller 1]
4. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   4.1. Output a_i

Løsning (b)

$a_j = 1$ nøyaktig når j er et kvadrattall. Grunnen er at det er kun kvadrattall som har et odde antall divisorer.

Oppgave 2.2

Overfør følgende binære tall til desimaltall ved å først skrive dem på ekspandert form.

(a) 1100101_2

(b) $1010111,1011_2$

Løsning

(a) $1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$64 + 32 + 4 + 1 = 101$

(b) $1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 +$
$1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} =$
$64 + 16 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 87,6875$

Algoritmen fra forelesningen gir for (a):
$0 \overset{\cdot 2+1}{\longrightarrow} 1 \overset{\cdot 2+1}{\longrightarrow} 3 \overset{\cdot 2+0}{\longrightarrow} 6 \overset{\cdot 2+0}{\longrightarrow} 12 \overset{\cdot 2+1}{\longrightarrow} 25 \overset{\cdot 2+0}{\longrightarrow} 50 \overset{\cdot 2+1}{\longrightarrow} 101$

Oppgave 2.3

Overfør følgende tall fra desimal til binær form.

(a) 826_{10}

(b) $0,34375_{10}$

(c) $1604,175_{10}$

(d) $-471,25_{10}$

Repetisjon fra boka

- n div 2 er kvotienten når n deles med 2
- n mod 2 er resten når n er deles med 2

Eksempel

12 div 2 = 6
12 mod 2 = 0

13 div 2 = 6
13 mod 2 = 1

Algoritme for å overføre fra desimal til binær form (baklengs)

1. Input n [n et naturlig tall]
2. **Repeat**
   2.1. Output n mod 2
   2.2. $n \leftarrow n$ div 2

   until $n = 0$

Eksempel

$$
\begin{array}{ccc}
2 & 8 & \\
 & 4 & 0 \\
 & 2 & 0 \\
 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 8_{10} = 1000_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
2 & 7 & \\
 & 3 & 1 \\
 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 7_{10} = 111_2
\end{array}
$$

Løsning (a) (826_{10})

$$
\begin{array}{rrl}
2 & 826 & \\
 & 413 & 0 \\
 & 206 & 1 \\
 & 103 & 0 \\
 & 51 & 1 \\
 & 25 & 1 \\
 & 12 & 1 \\
 & 6 & 0 \\
 & 3 & 0 \\
 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 826_{10} = 1100111010_2
\end{array}
$$

Mer repetisjon fra boka

- Anta at vi vil finne den binære formen til $0,375_{10}$.
- Siden $0,375$ er mindre enn $0,5$ vil første bit etter komma være 0.
- Siden $2 \cdot 0,375$ er mindre enn 1 vil første bit etter komma være 0.

- $\lfloor n \rfloor$ er heltallsdelen av n
- $\text{frac}(n)$ er n minus heltallsdelen av n

Første bit i den binære formen til n er heltallsdelen av $2n$.

Eksempel

$\lfloor 2,7 \rfloor = 2$

$\text{frac}(2,7) = 0,7$

$0,5_{10} = 0,1_2$

$0,25_{10} = 0,01_2$

$0,75_{10} = 0,11_2$

Utkast til algoritme

1. Input n $[0 \leq n \leq 1]$
2. **Repeat**
   2.1. $m \leftarrow 2n$
   2.2. Output $\lfloor m \rfloor$
   2.3. $n \leftarrow \mathrm{frac}(m)$

   until $n = 0$

Hva hvis $n = 0$ aldri inntreffer?

Eksempel

$$\begin{array}{ll} & ,25 \quad 2 \\ 0 & ,5 \\ 1 & ,0 \\ \hline & \quad 0,25_{10} = 0,01_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & ,375 \quad 2 \\ 0 & ,75 \\ 1 & ,5 \\ 1 & ,0 \\ \hline & \quad 0,375_{10} = 0,011_2 \end{array}$$

- Vi kan velge hvor nøyaktig vi vil ha svaret.

Algoritme

1. Input $n, sifre$ $[0 \leq n \leq 1,\ sifre \geq 1,\ sifre \text{ heltall}]$
2. $i \leftarrow 0$
3. **Repeat**
   3.1. $i \leftarrow i + 1$
   3.2. $m \leftarrow 2n$
   3.3. Output $\lfloor m \rfloor$
   3.4. $n \leftarrow \text{frac}(m)$

   until $n = 0$ **or** $i = sifre$

Løsning (b) $(0,34375_{10})$

$$
\begin{array}{ll}
 & ,34375 \quad 2 \\
0 & ,6875 \\
1 & ,375 \\
0 & ,75 \\
1 & ,5 \\
1 & ,0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$0,34375_{10} = 0,01011_2$$

Løsning (c) $(1604,175_{10})$

$$
\begin{array}{rrr}
2 & 1604 & \\
 & 802 & 0 \\
 & 401 & 0 \\
 & 200 & 1 \\
 & 100 & 0 \\
 & 50 & 0 \\
 & 25 & 0 \\
 & 12 & 1 \\
 & 6 & 0 \\
 & 3 & 0 \\
 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$1604_{10} = 11001000100_2$$

$$
\begin{array}{lll}
 & ,1875 & 2 \\
0 & ,375 & \\
0 & ,75 & \\
1 & ,5 & \\
1 & ,0 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$0,1875_{10} = 0,0011_2$$

Svar: $11001000100,0011_2$

Løsning (d) $(-471,25_{10})$

$$\begin{array}{rrr} 2 & 471 & \\ & 235 & 1 \\ & 117 & 1 \\ & 58 & 1 \\ & 29 & 0 \\ & 14 & 1 \\ & 7 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$471_{10} = 111010111_2$$

$$\begin{array}{lll} & ,25 & 2 \\ 0 & ,5 & \\ 1 & ,0 & \\ \hline \end{array}$$

$$0,25_{10} = 0,01_2$$

Svar: $-111010111,01_2$

Oppgave 2.4

Overfør følgende tall fra desimal til binær form, med 5 siffer etter komma.

(a) $0,2_{10}$

(b) $13,47_{10}$

Løsning (a)

$$
\begin{array}{ll}
 & ,2 \quad 2 \\
0 & ,4 \\
0 & ,8 \\
1 & ,6 \\
1 & ,2 \\
0 & ,4 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{0,2_{10} = 0,00110_2}
\end{array}
$$

Oppgave 2.4

Overfør følgende tall fra desimal til binær form, med 5 siffer etter komma.

(a) $0,2_{10}$

(b) $13,47_{10}$

Løsning (b)

$$\begin{array}{lll} 2 & 13 & \\ & 6 & 1 \\ & 3 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \\ \hline & & 13_{10} = 1101_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & ,47 & 2 \\ 0 & ,94 & \\ 1 & ,88 & \\ 1 & ,76 & \\ 1 & ,52 & \\ 1 & ,04 & \\ \hline & & 0,2_{10} = 0,01111_2 \end{array}$$

Svar: $1101,01111_2$

Oppgave 2.5

Hva er resultatet på verdien til et naturlig tall hvis

(a) 0 legges til dets binære representasjon?

(b) 1 legges til dets binære representasjon?

Løsning

(a) Tallet blir fordoblet.

(b) Tallet blir fordoblet og økt med 1.