MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 4: Ukeoppgaver fra kapittel 3 & 4

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

7. februar 2008

Oppgave 3.15

Forklar følgende påstand ved å vise til beregninger med reelle tall på eksponentiell form: "Man mister presisjon når nesten like tall subtraheres."

Løsning

Man mister presisjon fordi antall gjeldende/signifikante siffer reduseres.
Eksempel:

$$
\begin{array}{rlll}
 & 0,23456 & \cdot 10^5 & \text{5 gjeldende siffer} \\
- & 0,2345 & \cdot 10^5 & \text{4 gjeldende siffer} \\
\hline
= & 0,00006 & \cdot 10^5 & \\
= & 0,6 & \cdot 10^1 & \text{1 gjeldende siffer}
\end{array}
$$

Oppgave 4.1

Uttrykk følgende utsagn i utsagnslogikk og identifiser hovedkonnektivene.

(a) Either Karen is studying computing and Minh is not studying mathematics, or Minh is studying mathematics.

(b) It is not the case that if it is sunny then I will carry an umbrella.

(c) The program will terminate if and only if the input is not numeric or the escape key is pressed.

(d) If $x = 7$ and $y \neq 4$ and $z = 2$, then if it is not true that either $y = 4$ or $z \neq 2$ then $x = 7$ or $z = 2$.

Løsning 4.1

(a) Either Karen is studying computing and Minh is not studying mathematics, or Minh is studying mathematics.

p: "Karen is studying computing"

q: "Minh is studying mathematics"

Svar: $(p \land \neg q) \lor q$

Hovedkonnektivet er $\lor$ (eller)

(b) It is not the case that if it is sunny then I will carry an umbrella.

p: "it is sunny" q: "I will carry an umbrella"

Svar: $\neg(p \to q)$

Hovedkonnektivet er $\neg$ (ikke)

Løsning 4.1

(c) The program will terminate if and only if the input is not numeric or the escape key is pressed.

p: "the program will terminate"

q: "the input is numeric"

r: "the escape key is pressed"

Svar: $p \leftrightarrow (\neg q \vee r)$

Hovedkonnektivet er $\leftrightarrow$ (hvis-og-bare-hvis)

(d) If $x = 7$ and $y \neq 4$ and $z = 2$, then if it is not true that either $y = 4$ or $z \neq 2$ then $x = 7$ or $z = 2$.

p: "$x = 7$" q: "$y = 4$" r: "$z = 2$"

Svar: $(p \wedge \neg q \wedge r) \rightarrow (\neg(q \vee \neg r) \rightarrow (p \vee r))$

Hovedkonnektivet er første forekomst av $\rightarrow$ (hvis-så)

Oppgave 4.2

p: det snør

q: jeg skal gå på ski

Løsning

(a) $\neg p \wedge q$:
Det snør ikke og jeg skal gå på ski.

(b) $p \rightarrow q$:
Hvis det snør, så skal jeg gå på ski.

(c) $\neg q \rightarrow p$:
Hvis jeg ikke skal gå på ski, så snør det.

(d) $(p \vee \neg q) \wedge p$:
Enten snør det eller så skal jeg ikke gå på ski, og det snør.

Oppgave 4.3

(a) Skriv opp sannhetsverditabellen for konnektivet **xor** med symbolet $\oplus$, hvor $p \oplus q$ betyr "Enten p eller q, men ikke begge."

(b) Skriv opp sannhetsverditabeller som viser at $p \oplus q$ er logisk ekvivalent med $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

Løsning

p	q	$(p \oplus q)$	$(p \vee q)$	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F

Kolonne 1–3 er svar på (a). For (b), så må det påpekes at kolonne 3 og 7 er like.

Oppgave 4.6

Sett opp sannhetsverditabeller for følgende uttrykk. For hvert tilfelle, finn ut om det er en tautologi, en kontradiksjon eller ingen av delene.

Løsning

Vi gjør (a) og (d) her, og eventuelt (b) og (c) på tavlen.

Løsning

(a) $\neg(p \vee \neg q) \vee p$

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$\neg$	$q)$	$\vee$	p
T	T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T	F	F	F

- Utsagnet er hverken en tautologi eller en kontradiksjon.

Løsning

(d) $[(p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

p	q	r	$[(p \wedge r)$	$\vee$	$(q \wedge r)]$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$\neg q)$
T	T	T	T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	F	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	F	T	T

- Utsagnet er hverken en tautologi eller en kontradiksjon.

Oppgave 4.11

If ikke($x \geq 3$ og $x < 6$) **then** ...

Løsning

- ikke($x \geq 3$ og $x < 6$) kan skrives om til
- (ikke $x \geq 3$) eller (ikke $x < 6$), som kan skrives om til
- $x < 3$ eller $x \geq 6$
- Vi får da: **If** $x < 3$ eller $x \geq 6$ **then** ...

Oppgave 4.12

Skriv om følgende pseudokode ved å erstate **Repeat-until**-løkken med en **While-do**-løkke:

1. $n \leftarrow 0$
2. $term \leftarrow 1$
3. $sum \leftarrow 0$
4. **Repeat**
   4.1. $n \leftarrow n + 1$
   4.2. $term \leftarrow term/2$
   4.3. $sum \leftarrow sum + term$

   until $term < 0,001$ eller $n = 100$

Løsning

- **Repeat-until**-løkken blir utført minst én gang.
- Så lenge betingelsen ($term < 0,001$ eller $n = 100$) ikke er oppfylt, så skal koden i løkken utføres. Vi kan derfor se på betingelsen "ikke ($term < 0,001$ eller $n = 100$)":
  - ikke ($term < 0,001$ eller $n = 100$)
  - (ikke $term < 0,001$) og (ikke $n = 100$)
  - $term \geq 0,001$ og $n \neq 100$

Løsning

Gammel kode

1. $n \leftarrow 0$
2. $term \leftarrow 1$
3. $sum \leftarrow 0$
4. **Repeat**
    4.1. $n \leftarrow n + 1$
    4.2. $term \leftarrow term/2$
    4.3. $sum \leftarrow sum + term$

   until $term < 0,001$ eller $n = 100$

Ny kode

1. $n \leftarrow 0$
2. $term \leftarrow 1$
3. $sum \leftarrow 0$
4. $n \leftarrow n + 1$
5. $term \leftarrow term/2$
6. $sum \leftarrow sum + term$
7. **While** $term \geq 0,001$ og $n \neq 100$ **do**
    7.1. $n \leftarrow n + 1$
    7.2. $term \leftarrow term/2$
    7.3. $sum \leftarrow sum + term$

Oppgave 4.16

Finn et uttrykk som er logisk ekvivalent med $p \vee q$, men som kun bruker konnektivene $\wedge$ og $\neg$.

Løsning

- Vi vet at $p \vee q$ er logisk ekvivalent med $\neg\neg(p \vee q)$.
- Vi vet også at $\neg(p \vee q)$ er logisk ekvivalent med $\neg p \wedge \neg q$.
- Da må $\neg\neg(p \vee q)$, og $p \vee q$, være logisk ekvivalent med $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

p	q	$p \vee q$	$\neg$	$(\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
T	T	T	T	F	F	F
T	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T

Oppgave 4.17

p	q	$p \mid q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

(a) Finn et uttrykk som er logisk ekvivalent med $\neg p$ som kun bruker $\mid$.

(b) Finn et uttrykk som er logisk ekvivalent med $p \wedge q$ som kun bruker $\mid$.

(c) Finn et uttrykk som er logisk ekvivalent med $p \vee q$ som kun bruker $\mid$.

Løsning

(a)

p	$p \mid p$
T	F
F	T

(b)

p	q	$p \wedge q$	$p \mid q$	$(p \mid q) \mid (p \mid q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

(c)

p	q	$p \vee q$	$p \mid p$	$q \mid q$	$(p \mid p) \mid (q \mid q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F

Oppgave 4.24

Denne setningen har fem ord.

(a) Hva er sannhetsverdien til denne påstanden?

(b) Skriv ned negasjonen til påstanden. Hva er sannhetsverdien?

Løsning

(a) Den er sann.

(b) “Denne setningen har ikke fem ord.” Den er også sann.
(Diskusjon i plenum.)