MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 5: Ukeoppgaver fra kapittel 4

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

14. februar 2008

Oppgave 4.4

Skriv ned setninger som svarer til den konverse og den kontrapositive av følgende utsagn.

Husk at hvis $p \longrightarrow q$ er påstanden, så har vi at

- $q \longrightarrow p$ er den konverse, og at
- $\neg q \longrightarrow \neg p$ er den kontrapositive.

Den konverse betyr noe annet enn den opprinnelige påstanden, mens den kontrapositive er logisk ekvivalent med den opprinnelige påstanden.

Løsning

(a) Hvis inputfilen eksisterer, så genereres ikke en feilmelding.

- Konvers:
  Hvis det ikke genereres en feilmelding, så eksisterer inputfilen.
- Kontrapositiv:
  Hvis det genereres en feilmelding, så eksisterer ikke inputfilen.

Løsning

(b) Hvis databasen ikke er tilgjengelig, så kan ikke programmet mitt kjøre.

- Konvers:
  Hvis ikke programmet mitt kan kjøre, så er ikke databasen tilgjengelig.
- Kontrapositiv:
  Hvis programmet mitt kan kjøre, så er databasen tilgjengelig.

Løsning

(c) Hvis programmet ikke inneholder noen feil, så gir det korrekt output.

- Konvers:
  Hvis programmet gir korrekt output, så inneholder det ikke noen feil.
- Kontrapositiv:
  Hvis programmet ikke gir korrekt output, så inneholder det noen feil.

Oppgave 4.7

La P og Q stå for logiske uttrykk. Hvis P er usann for en gitt tilordning av sannhetsverdier til variablene, så må $P \wedge Q$ være usann for den tilordningen, så det er ikke nødvendig å finne verdien til Q.

(a) Gi en tilsvarende regel for $P \vee Q$

(b) Konstruer, ved å bruke disse reglene som snarveier, sannhetsverditabellene for følgende uttrykk.

  (i) $[\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee \neg r)] \wedge [(p \wedge r) \vee \neg q]$

  (ii) $\neg[\neg p \wedge (q \vee r)] \vee (\neg p \wedge \neg r)$

Løsning (a)

Hvis P er sann for en gitt tilordning av sannhetsverdier til variablene, så må $P \vee Q$ være sann for den tilordningen, så det er ikke nødvendig å finne verdien til Q.

Løsning (b - i)

p	q	r	$[\neg$	$(p \wedge q)$	$\wedge$	$(p \vee \neg r)]$	$\wedge$	$[(p \wedge r)$	$\vee$	$\neg q]$
T	T	T	F	T	F	–	F	–	–	–
T	T	F	F	T	F	–	F	–	–	–
T	F	T	T	F	T	T	T	–	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T	–	T	T
F	T	T	T	F	F	F	F	–	–	–
F	T	F	T	F	T	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F	–	–	–
F	F	F	T	F	T	T	T	–	T	T

Løsning (b - ii)

p	q	r	$\neg$	$[\neg p$	$\wedge$	$(q \vee r)]$	$\vee$	$(\neg p \wedge \neg r)$
T	T	T	T	F	F	–	T	–
T	T	F	T	F	F	–	T	–
T	F	T	T	F	F	–	T	–
T	F	F	T	F	F	–	T	–
F	T	T	F	T	T	T	F	F
F	T	F	–	–	–	–	T	T
F	F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	F	–	–	–	–	T	T

Oppgave 4.8

Bruk sannhetsverditabeller for å vise at $\neg(p \vee \neg q)$ og $\neg p \wedge q$ er logisk ekvivalente.

Løsning

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$\neg q)$	$\neg p$	$\wedge$	q
T	T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	F	F

Oppgave 4.9

Bruk sannhetsverditabeller for å vise følgende logiske lover.

(a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Løsning (a)

p	q	r	p	$\wedge$	$(q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$\vee$	$(p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	–
T	T	F	T	T	T	T	T	–
T	F	T	T	T	T	–	T	T
T	F	F	–	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	–	F	F	F
F	T	F	F	F	–	F	F	F
F	F	T	F	F	–	F	F	F
F	F	F	F	F	–	F	F	F

Oppgave 4.18

Uttrykk følgende påstander i predikatlogikk, og finn deres sannhetsverdier.

(a) Det fins et reellt tall x slik at $x^2 - 3x + 2 = 0$.

(b) For ethvert reellt tall x, så fins det et reellt tall y slik at $x = y^2$.

Løsning

(a) $\exists x(x \in \mathbb{R} \land x^2 - 3x + 2 = 0)$ eller $\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0)$
Sant; hvis vi lar $x = 2$, så ser vi at påstanden holder.

(b) $\forall x(x \in \mathbb{R} \to \exists y(y \in \mathbb{R} \land x = y^2))$ eller $\forall x \exists y(x = y^2)$
Usant; vi får et moteksempel ved å la $x = -1$.

Oppgave 4.19

Skriv negasjonene til påstandene i oppgave 4.18, både symbolsk og på norsk.

Løsning

(a) $\neg\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0)$ eller $\forall x(x^2 - 3x + 2 \neq 0)$
For alle reelle tall x, så er det ikke slik at $x^2 - 3x + 2 = 0$.

(b) $\neg\forall x\exists y(x = y^2)$ eller $\exists x\forall y(x \neq y^2)$
Det fins et reellt tall x slik at for alle y, så er det ikke slik at $x = y^2$.

Oppgave 4.20

I spesifikasjonen til et biblioteksystem har vi følgende predikatsymboler:

- $B(p, b)$, som står for predikatet "person p har lånt bok b", og
- $O(b)$, som står for predikatet "bok b har forfalt".

Utrykk følgende setninger i predikatlogikk.

Løsning

(a) Person p har lånt en bok. (Anta at *en* betyr *minst en*.)

- Det fins en bok x slik at p har lånt x.
- $\exists x$(person p har lånt bok x)
- $\exists x B(p, x)$

(b) Bok b er utlånt.

- Det fins en person x slik at x har lånt bok b.
- $\exists x$(person x har lånt bok b)
- $\exists x B(x, b)$

(c) Bok b står på hylla.

- Det fins ingen som har lånt bok b.
- $\neg \exists x B(x, b)$ eller $\forall x \neg B(x, b)$

(d) Person p har lånt minst to bøker.

- Det fins en bok x og en bok y slik at person p har lånt x og y.
- Vi må også si at x og y ikke kan være samme bok.
- $\exists x \exists y (B(p, x) \wedge B(p, y) \wedge x \neq y)$

Løsning

(e) Ingen bok har blitt lånt av mer enn en person.

- Det fins ikke en bok b som er lånt av to (forskjellige) personer.
- $\neg\exists b$(to forskjellige personer har lånt b)
- $\neg\exists b\exists x\exists y(B(x,b)\wedge B(y,b)\wedge x\neq y)$
- alternativt: $\forall b\neg\exists x\exists y(B(x,b)\wedge B(y,b)\wedge x\neq y)$
- alternativt: $\forall b\forall x\forall y\neg(B(x,b)\wedge B(y,b)\wedge x\neq y)$
- alternativt: $\forall b\forall x\forall y(B(x,b)\wedge B(y,b)\rightarrow x=y)$

(f) Det fins ingen forfalte bøker.

- Det fins ikke en bok x slik at x har forfalt.
- $\neg\exists xO(x)$ eller $\forall x\neg O(x)$

(g) Hvis en bok har forfalt, så må den være utlånt.

- For alle bøker x, hvis x har forfalt, så fins en person y som har lånt x.
- $\forall x(O(x)\rightarrow\exists yB(y,x))$

(h) Person p har en forfalt bok.

- Det fins en forfalt bok x slik at person p har lånt x.
- $\exists x(O(x)\wedge B(p,x))$

Oppgave 4.21 (a) Bevis følgende påstand

Summen av et partall og et oddetall er et oddetall.

Bevis

- Anta at x er et partall og at y er et oddetall.
- Siden x er et partall, så fins det et heltall m slik at $x = 2m$.
- Siden y er et oddetall, så fins det et heltall n slik at $y = 2n + 1$.
- Summen $x + y$ blir da $2m + 2n + 1$.
- Ved å faktorisere får vi at $x + y$ er $2(m + n) + 1$.
- Siden $x + y$ er på formen $2s + 1$, så må det være et oddetall.
- Siden x og y var *vilkårlig* valgt, vil påstanden gjelde for *alle* slike tall.

Oppgave 4.21 (b) Bevis følgende påstand

Produktet av to oddetall er et oddetall.

Bevis

- Anta at x er et oddetall og at y er et oddetall.
- Siden x er et oddetall, så fins det et heltall m slik at $x = 2m + 1$.
- Siden y er et oddetall, så fins det et heltall n slik at $y = 2n + 1$.
- Produktet xy blir da $(2m + 1)(2n + 1)$.
- Ved å gange ut får vi at xy er $4mn + 2m + 2n + 1$.
- Ved å faktorisere får vi at xy er $2(2mn + m + n) + 1$.
- Siden xy er på formen $2s + 1$, så må det være et oddetall.
- Siden x og y var *vilkårlig* valgt, vil påstanden gjelde for *alle* slike tall.

Oppgave 4.21 (c) Bevis følgende påstand

Hvis $x + y < 2$, så $x < 1$ eller $y < 1$, for reelle tall x og y.

Bevis

- Et indirekte bevis får vi ved å anta det motsatte av påstanden og komme frem til en selvmotsigelse.
- Anta for motsigelse at det fins reelle tall x og y slik at $x + y < 2$ men hverken $x < 1$ eller $y < 1$.
- Siden $x \not< 1$, har vi $x \geq 1$.
- Siden $y \not< 1$, har vi $y \geq 1$.
- Da må $x + y \geq 2$.
- Det gir en motsigelse, siden vi har antatt $x + y < 2$.
- Vi konkluderer med at påstanden holder.

Bevis (Alternativt bevis)

- La x og y være reelle tall slik at $x + y < 2$.
- Hvis $x < 1$, så er vi ferdige.
- Vi kan derfor anta at $x \geq 1$.
- Vi må så vise at $y < 1$.
- Siden $x + y < 2$, så må $y < 2 - x$.
- Siden $y < 2 - x$ og $x \geq 1$, så må $y < 1$, og vi er ferdige.

Oppgave 4.21 (d) Bevis følgende påstand

Summen av fem etterfølgende heltall er delelig med 5.

Bevis

- La y være summen av fem etterfølgende heltall.
- Anta at $y = x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4)$.
- Vi må vise at y er delelig med 5.
- Vi får at $y = 5x + 1 + 2 + 3 + 4 = 5x + 10 = 5(x+2)$.
- Vi konkluderer med at y er delelig med 5.

Oppgave 4.21 (e) Bevis følgende påstand

Hvis n er et heltall, så er $n^2 + n$ et partall.

Bevis

- n må enten være et partall eller et oddetall.
- Anta først at n er et partall. Da fins det en m slik at $n = 2m$.

$$\begin{aligned} n^2 + n &= (2m)^2 + (2m) \\ &= 4m^2 + 2m \\ &= 2(2m^2 + m) \end{aligned}$$

- Anta så at n er et oddetall. Da fins det en m slik at $n = 2m + 1$.

$$\begin{aligned} n^2 + n &= (2m+1)^2 + (2m+1) \\ &= (4m^2 + 4m + 1) + (2m + 1) \\ &= 4m^2 + 6m + 2 \\ &= 2(2m^2 + 3m + 1) \end{aligned}$$

- Siden $n^2 + n$ i begge tilfeller er lik $2x$, for et heltall x, så må $n^2 + n$ være et partall.

Oppgave 4.21 (f) Bevis følgende påstand

Hvis n er et oddetall, så er $n^2 - 1$ delelig med 4.

Bevis

- Siden n er et oddetall, fins en m slik at $n = 2m + 1$.

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2m+1)^2 - 1 \\ &= (4m^2 + 4m + 1) - 1 \\ &= 4m^2 + 4m \\ &= 4(m^2 + m) \end{aligned}$$

- Siden $n^2 - 1 = 4(m^2 + m)$, så må $n^2 - 1$ være delelig med 4.

Oppgave 4.22

Fyll inn detaljene i bevisskissen for at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Løsning

1. Anta at $m/n = \sqrt{2}$, hvor m og n er naturlige tall. Forklar hvorfor vi kan anta at m og n ikke begge er partall.
   - Vi kan alltid forkorte en brøk slik at teller og nevner ikke har noen felles faktorer. Hvis både m og n hadde vært partall, kunne vi ha delt teller og nevner med 2 og fått en enklere brøk. Derfor kan vi anta at m/n allerede er forkortet maksimalt.
2. Utled at $m^2 = 2n^2$, og forklar så hvorfor m må være et partall.
   - Siden $m/n = \sqrt{2}$, så får vi ved å ta kvadratet av hver side $(m/n)^2 = (\sqrt{2})^2$, det vil si $m^2/n^2 = 2$. Ved å gange med n^2 på begge sider, får vi $m^2 = 2n^2$.
   - Siden $m^2 = 2n^2$, så må m^2 være et partall. Vi må vise at m også er et partall. Hvis m hadde vært et oddetall, så måtte m^2 også ha vært et oddetall. (Sjekk selv.) Siden m^2 ikke er et oddetall, så kan ikke m være oddetall heller. Vi konkluderer med at m er et partall.

Løsning

3. La $m = 2k$ (hvor k er et naturlig tall), og utled at n er et partall.
   - Fra $m^2 = 2n^2$ får vi at $(2k)^2 = 4k^2 = 2n^2$, det vil si at $2k^2 = n^2$. Det betyr at n^2 er et partall. Da må n også være et partall (ved samme argument som over).
4. Forklar hvorfor dette viser at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.
   - Fordi vi har kommet frem til en motsigelse ved at både m og n er partall.
   - Vi begynte med å anta for motsigelse at $\sqrt{2}$ var rasjonalt, det vil si at $\sqrt{2} = m/n$, hvor m og n er naturlige tall. Vi antok at m/n var maksimalt forkortet og at m og n derfor ikke begge kunne være partall. Deretter utledet vi at både m og n måtte være partall allikevel og fikk en motsigelse.

Oppgave 4.23

Finn et moteksempel til følgende påstander.

Løsning

(a) Ethvert naturlig tall delelig med både 4 og 6 må også være delelig med 24.
  - Et moteksempel er 12.

(b) Hvis n er et naturlig tall, så må $n^4 + 4$ være et multippel av 5.
  - Et moteksempel er 5 eller 10.

(c) Ethvert naturlig tall kan uttrykkes på formen $x^2 + y^2 + z^2$, for ikke-negative heltall x, y og z.
  - Et moteksempel er 7.