MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 6: Ukeoppgaver fra kapittel 5

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

21. februar 2008

Oppgave 5.1

Skriv følgende mengder på listeform.

(a) Mengden av alle vokaler

(b) $\{x \in \mathbb{N} : 10 \leq x \leq 20$ og x er delbar med $3\}$

(c) Mengden av alle naturlige tall som gir en rest på 1 når de deles på 5.

Løsning

(a) $\{\text{a}, \text{e}, \text{i}, \text{o}, \text{u}, \text{y}, \text{æ}, \text{ø}, \text{å}\}$

(b) $\{12, 15, 18\}$

(c) $\{1, 6, 11, 16, \ldots\}$

Oppgave 5.2

Skriv ned følgende mengder på "predikatform".

(a) $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

(b) $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

(c) $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

Løsning

(a) $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 20$ og x er delbar med $4\}$ eller $\{x : x = 4y$ for et naturlig tall $y \leq 5\}$

(b) $\{x : x$ er en streng med tre bit$\}$ eller $\{x : x \in \{0,1\}^3\}$

(c) $\{x :$ det fins et naturlig tall y slik at $x = y^2\}$ eller $\{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$ eller $\{x \in \mathbb{N} : \exists y(x = y^2)\}$ eller $\{x :$ x er et kvadrattall$\}$

Oppgave 5.3

La $A = \{1, \{1\}, \{2\}, 3\}$. Avgjør hvilke av følgende påstander som er sanne og usanne.

Løsning

(a) $1 \in A$ Sann

(b) $1 \subseteq A$ Usann

(c) $\{1\} \in A$ Sann

(d) $\{1\} \subseteq A$ Sann

(e) $\{\{1\}\} \subseteq A$ Sann

(f) $2 \in A$ Usann

(g) $\{2\} \in A$ Sann

(h) $\{2\} \subseteq A$ Usann

(i) $\{3\} \in A$ Usann

(j) $\{3\} \subseteq A$ Sann

Oppgave 5.4

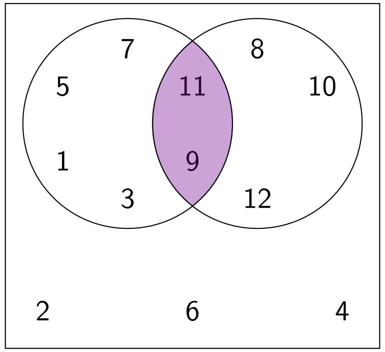
La

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\},$$
$$A = \{x : x \text{ er oddetall}\},$$
$$B = \{x : x > 7\}, \text{ og}$$
$$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}.$$

Lag Venn-diagrammer for mengdene. Skriv ned følgende mengder på listeform.

(a) $A \cap B$
(b) $B \cup C$
(c) $\overline{A}$
(d) $(A \cup \overline{B}) \cap C$
(e) $\overline{(A \cup C)} \cup \overline{C}$

(a) $A \cap B$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$

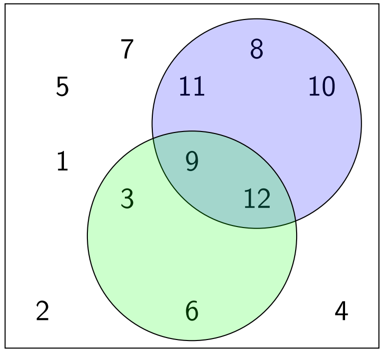
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (a): $\{9, 11\}$

(b) $B \cup C$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$

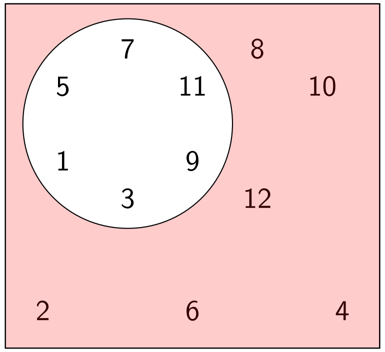
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (b): $\{3, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(c) $\overline{A}$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$

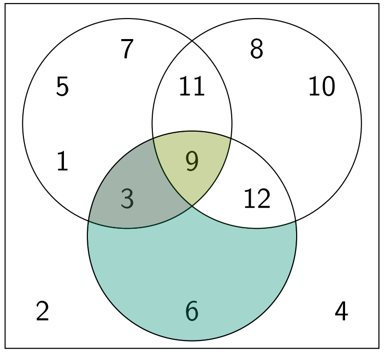
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (c): $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

(d) $(A \cup \overline{B}) \cap C$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$

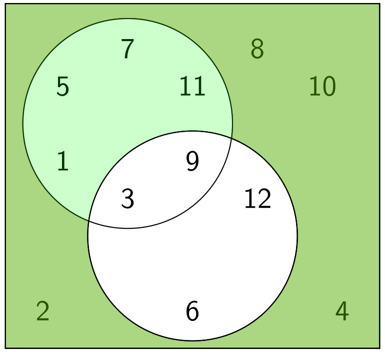
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (d): $\{3, 6, 9\}$

(e) $\overline{(A \cup C)} \cup \overline{C}$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$

$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

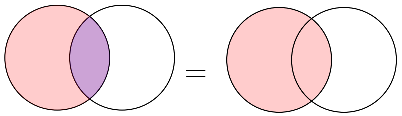
$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (e): $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

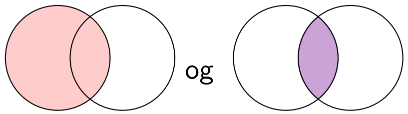
Oppgave 5.6

Illustrer den andre absorpsjonsloven, $A \cup (A \cap B) = A$, ved å bruke Venn-diagrammer.



$A \cup (A \cap B)$ A

Diagrammet for $A \cup (A \cap B)$ får vi ved å slå sammen følgende diagrammer:

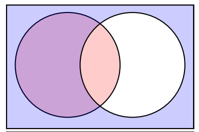


A $A \cap B$

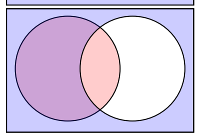
Oppgave 5.7 (med Venn-diagrammer)

Vis at $\overline{\overline{A} \cap B} = A \cup \overline{B}$ ved å bruke Venn-diagrammer.

Venn-diagrammet for $\overline{\overline{A} \cap B}$:



Venn-diagrammet for $A \cup \overline{B}$:



Siden Venn-diagrammene er like, må $\overline{\overline{A} \cap B} = A \cup \overline{B}$.

Oppgave 5.8

Er påstanden "enhver mengde med n elementer har 2^n delmengder" sann når $n = 0$?

Løsning

- Når $n = 0$ er mengden tom.
- Hvor mange delmengder har en tom mengde?
- Den har nøyaktig én delmengde, nemlig den tomme mengden.
- Siden $2^0 = 1$, blir svaret ja.

Oppgave 5.9

La $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{p, q\}$. Skriv ned følgende mengder på listeform.

(a) $A \times B$

(b) A^2

(c) B^3

Løsning

(a) $A \times B = \{(a,p),(a,q),(b,p),(b,q),(c,p),(c,q)\}$

(b) $A^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

(c) $B^3 = \{(p,p,p),(p,p,q),(p,q,p),(p,q,q),$
$(q,p,p),(q,p,q),(q,q,p),(q,q,q)\}$

Oppgave 5.10

Uttrykk hver av følgende mengder som et Kartesisk produkt av mengder.

Løsning

Eventuelt på tavla.

Oppgave 5.13

Se på følgende algoritme.

1. Input en bitstreng b
2. $n \leftarrow$ det usignerte bitet som har b som sin binære representasjon
3. $teller \leftarrow 0$
4. **While** $n > 0$ **do**
   - 4.1. $n \leftarrow n \wedge (n-1)$ [$\wedge$ betyr her bitvis 'og', her anvendt på den binære representasjonen av n og $n-1$]
   - 4.2. $teller \leftarrow teller + 1$ [skrivefeil i boka: det står $-$ i stedet for $+$]
5. Output $teller$

Vis at returverdien er antall enere i b.

Eksempel

Anta at input er 100101.

teller	binær representasjon av n og $n-1$
0	1001001
	1001000
1	1001000
	1000111
2	1000000
	0111111
3	0000000

Eksempel

Anta at input er 111101.

teller	binær representasjon av n og $n-1$
0	1111001
	1111000
1	1111000
	1110111
2	1110000
	1101111
3	1100000
	1011111
4	1000000
	0111111
5	0000000

Løsning

- Vi skal vise at returverdien er antall enere i inputverdien.
- Det er tilstrekkelig å vise at hvert steg i **While**-løkken reduserer antall enere med nøyaktig én.
- Vi må vise at bitvis $\wedge$ av representasjonene til n og $n-1$ reduserer antall enere med nøyaktig én.
- La $b_1 \dots b_k$ være representasjonen til n.
- Vi kan anta at $n > 0$. Da må minst et bit være en ener.
- La b_m være eneren som forekommer lengst til høyre, for $1 \leq m \leq k$.
- Vi har følgende situasjon, hvor vi ser at bitvis $\wedge$ fjerner nøyaktig én ener. (Eventuelt flere detaljer i plenum.)

$$\begin{array}{c} b_1 b_2 \dots b_{m-1} 100 \dots 00 \\ b_1 b_2 \dots b_{m-1} 011 \dots 11 \\ \hline b_1 b_2 \dots b_{m-1} 000 \dots 00 \end{array}$$

Oppgave 5.14

Se på følgende sekvens av steg i pseudokode, hvor x og y er bitstrenger av lik lengde.

1. $x \leftarrow x \oplus y$ [$\oplus$ står for bitvis eksklusiv eller]
2. $y \leftarrow x \oplus y$
3. $x \leftarrow x \oplus y$

Vis at effekten av sekvensen av steg er å bytte verdiene til x og y.

Løsning

- La $x = x_1 \dots x_n$ og $y = y_1 \dots y_n$.
- La oss se på hva som skjer bitvis, for x_i og y_i, hvor $1 \leq i \leq n$.
- Steg 1, $x \leftarrow x \oplus y$, setter x_i lik $x_i \oplus y_i$.
- Steg 2, $y \leftarrow x \oplus y$, setter y_i lik $(x_i \oplus y_i) \oplus y_i$.
- Steg 3, $x \leftarrow x \oplus y$, setter x_i lik $(x_i \oplus y_i) \oplus ((x_i \oplus y_i) \oplus y_i)$.
- Vi må vise at $(x_i \oplus y_i) \oplus y_i$ er lik den opprinnelige x_i.
- Vi må vise at $(x_i \oplus y_i) \oplus ((x_i \oplus y_i) \oplus y_i)$ er lik den opprinnelige y_i.

x_i	y_i	$(x_i \oplus y_i)$	$\oplus$	$((x_i \oplus y_i)$	$\oplus$	$y_i)$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

- Kolonnene 1 og 6 er like, og kolonnene 2 og 4 er like.

Løsning

- Vi kunne også ha løst oppgaven ved å vise at $(p \oplus q) \oplus q$ er logisk ekvivalent med p.

p	q	$(p \oplus q)$	$\oplus$	q
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

- Da må $(x_i \oplus y_i) \oplus y_i$ (den nye verdien til y_i) være lik x_i
- Da må $(x_i \oplus y_i) \oplus ((x_i \oplus y_i) \oplus y_i)$ (den nye verdien til x_i) være lik y_i.

Oppgave 5.15

La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la R være relasjonen på A som er definert slik:

$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,5), (5,2), (5.5)\}$$

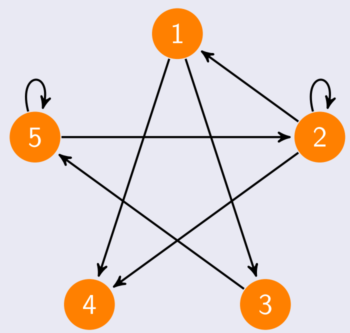
(a) Skriv ned relasjonen R på matriseform.
(b) Tegn den grafiske representasjonen av R.

$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,5), (5,2), (5,5)\}$$

Løsning

Vi gir relasjonen på matriseform og tegner den grafiske representasjonen.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{T} \\ \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{T} \end{array}\right] \end{array}$$



Oppgave fra forelesning 04.02.2008, side 9

a) Vis at hvis A, B og C er sammensatte utsagn, så vil

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

og at

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A).$$

b) Forklar hvorfor dette betyr at rekkefølge og parentessetting ikke betyr noe i et utsagnslogisk uttrykk som bare bruker bindeordet $\leftrightarrow$

c) [Vanskelig] Hvordan kan vi lett avgjøre om et slikt uttrykk er en tautologi eller ikke?

Løsning (a)

A	B	C	$(A \leftrightarrow B)$	$\leftrightarrow$	C	A	$\leftrightarrow$	$(B \leftrightarrow C)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	F	F	F	F	T

A	B	$(A \leftrightarrow B)$	$(B \leftrightarrow A)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

Løsning (b)

Den første sannhetsverditabellen fra (a) gir oss at parentessetting er overflødig når vi kun bruker $\leftrightarrow$. Vi kan skrive $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$ i stedet for både $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ og $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$. Eksempel:

- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (C \leftrightarrow (D \leftrightarrow E)) \equiv$
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (C \leftrightarrow D \leftrightarrow E) \equiv$
- $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow D \leftrightarrow E$

Den andre sannhetsverditabellen fra (a) gir oss at rekkefølgen ikke spiller noen rolle. F.eks. kan vi skrive $A \leftrightarrow B$ i stedet for $B \leftrightarrow A$.

Løsning (c)

Siden hverken rekkefølge eller parentessetting spiller noen rolle for sannhetsverdien til et uttrykk som består av $\leftrightarrow$, så står vi fritt til å gruppere utsagnsvariablene som vi ønsker. Det kan da være en idé å sette like utsagnsvariable ved siden av hverandre. Eksempel:

- $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (C \leftrightarrow B)) \leftrightarrow A$
- Ved å ta bort parentesene får vi $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow B \leftrightarrow A$.
- Ved å endre på rekkefølgen får vi $A \leftrightarrow A \leftrightarrow B \leftrightarrow B \leftrightarrow C$.
- Ved å sette på parenteser igjen får vi $(A \leftrightarrow A) \leftrightarrow ((B \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$.
- Vi ser at $(A \leftrightarrow A)$ og $(B \leftrightarrow B)$ er tautologier, så uttrykket er ekvivalent med C, som ikke er en tautologi.

Hvis uttrykket hadde bestått av et partall forekomster av hver utsagnsvariabel, så ville to og to like utsagnsvariable kansellert hverandre, helt til vi hadde hatt kun en tautologi til slutt.

Løsning (c)

Et utsagnslogisk uttrykk som kun inneholder bindeordet $\leftrightarrow$ er en tautologi hvis og bare hvis det inneholder et partall forekomster av hver utsagnsvariabel.