MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 7: Ukeoppgaver fra kapittel 5 & 6, mm.

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

28. februar 2008

Oppgave 5.16

La R være relasjonen på $\{a, b, c, d\}$ definert av følgende matrise.

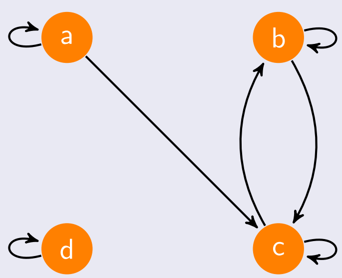
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} T & F & T & F \\ F & T & T & F \\ F & T & T & F \\ F & F & F & T \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Tegn den grafiske representasjonen av R.

(b) Finn ut, og gi grunner for hvorvidt, R er refleksiv, symmetrisk eller transitiv.

Løsning

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} T & F & T & F \\ F & T & T & F \\ F & T & T & F \\ F & F & F & T \end{bmatrix} \end{array}$$



- Er R refleksiv? Ja Hvorfor? Fordi alle på diagonalen er T. Og fordi alle nodene har en pil til seg selv.
- Er R symmetrisk? Nei Hvorfor ikke? Fordi matrisen ikke kan speiles om diagonalen. Vi har $(a, c) \in R$, men ikke $(c, a) \in R$.
- Er R transitiv? Nei Hvorfor ikke? Vi har $(a, c) \in R$ og $(c, b) \in R$, men ikke $(a, b) \in R$.

Oppgave 5.17

Er matriserepresentasjonen av en relasjon unik eller kan den samme relasjonen representeres av to forskjellige matriser?

Løsning

Representasjonen er ikke unik, siden den samme relasjonen kan representeres av to forskjellige matriser.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} F & T \\ T & T \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} b & a \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ a \end{array} & \begin{bmatrix} T & T \\ T & F \end{bmatrix} \end{array}$$

Begge matrisene representerer relasjonen $\{(a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Oppgave 5.18

Avgjør om følgende relasjoner refleksive, irrefleksive, symmetriske, antisymmetriske eller transitive.

(a) "er søsken (bror eller søster) til", på mengden av alle mennesker

(b) "er sønnen til", på mengden av alle mennesker

(c) "er større enn", på mengden av reelle tall

(d) relasjonen R på reelle tall definert ved xRy hvis $x^2 = y^2$

(e) "har samme heltallsdel som", på mengden av reelle tall

(f) "er et multippel av", på mengden av positive heltall

Oppgave 5.19

Avgjør hvilke av relasjonene i Oppgave 5.18 som er ekvivalensrelasjoner. For de som er ekvivalensrelasjoner, beskriv ekvivalensklassene.

Oppgave 5.20

Avgjør hvilke av relasjonene i Oppgave 5.18 som er partielle ordninger.

Løsning

(a) "er søsken (bror eller søster) til", på mengden av alle mennesker

- Refleksiv? Nei, det fins en som ikke er sin egen bror eller søster.
- Irrefleksiv? Ja, ingen er sin egen bror eller søster.
- Symmetrisk? Ja, hvis x er søsken til y, så er y søsken til x.
- Antisymmetrisk? Nei, vi ha at x er søsken til y og at y søsken til x, uten at $x = y$.
- Transitiv? Nei, hvis vi tillater halvsøsken, så kan a være søsken til b, og b søsken til c, uten at a er søsken til c. En annen grunn er at a kan være søsken til b og b søsken til a, men a kan er ikke søsken til a. (Takk til oppmerksomme studenter!)
- Ekvivalensrelasjon? Nei, den er ikke refleksiv
- Partiell ordning? Nei, den er hverken refleksiv, antisymmetrisk eller transitiv.

Løsning

(b) "er sønnen til", på mengden av alle mennesker

- Refleksiv? Nei, det fins en som ikke er sin egen sønn.
- Irrefleksiv? Ja, ingen er sin egen sønn.
- Symmetrisk? Nei, fordi "X er sønnen til Y" ikke medfører at "Y er sønnen til X".
- Antisymmetrisk? Ja, fordi "X er sønnen til Y" og "Y er sønnen til X" aldri er sanne samtidig.
- Transitiv? Nei, "X er sønnen til Y" og "Y er sønnen til Z" ikke medfører at "X er sønnen til Z".
- Ekvivalensrelasjon? Nei, den er hverken refleksiv, symmetrisk eller transitiv.
- Partiell ordning? Nei, den er hverken refleksiv eller transitiv.

Løsning

(c) "er større enn", på mengden av reelle tall

- Refleksiv? Nei, det fins et reellt tall som ikke er større enn seg selv.
- Irrefleksiv? Ja, ingen reelle tall er større enn seg selv.
- Symmetrisk? Nei, f.eks. er 3 større enn 2, men 2 er ikke større enn 3.
- Antisymmetrisk? Ja, vi kan ikke ha at to tall er større enn hverandre.
- Transitiv? Ja, hvis x er større enn y og y er større enn z, så er x større enn z.
- Ekvivalensrelasjon? Nei, den er hverken refleksiv eller symmetrisk.
- Partiell ordning? Nei, den er ikke refleksiv.

Løsning

(d) relasjonen R på reelle tall definert ved xRy hvis $x^2 = y^2$

- Refleksiv? Ja, siden $x^2 = x^2$.
- Irrefleksiv? Nei, nei, f.eks. har vi at $1R1$.
- Symmetrisk? Ja, hvis $x^2 = y^2$ holder, så vil også $y^2 = x^2$ holde.
- Antisymmetrisk? Nei, vi har at $1R(-1)$ og $(-1)R1$, men $1 \neq -1$.
- Transitiv? Ja, hvis $x^2 = y^2$ og $y^2 = z^2$, så $x^2 = z^2$.
- Ekvivalensrelasjon? Ja
- Ekvivalensklasser: Alle mengder $\{x, -x\}$, hvor x er et positivt reellt tall, samt $\{0\}$.
- Partiell ordning? Nei, den er ikke antisymmetrisk.

Løsning

(e) "har samme heltallsdel som", på mengden av reelle tall

- Refleksiv? Ja, ethvert tall har samme heltallsdel som seg selv.
- Irrefleksiv? Nei, f.eks. har $3,14$ samme heltallsdel som seg selv.
- Symmetrisk? Ja, hvis x har samme heltallsdel som y, så må y ha samme heltallsdel som x.
- Antisymmetrisk? Nei, vi har at $1,28$ og $1,32$ har samme heltallsdel, men de er ikke like.
- Transitiv? Ja
- Ekvivalensrelasjon? Ja
- Ekvivalensklasser: For hvert heltall n har vi en ekvivalensklasse som består av de reelle tall med heltallsdel lik n:

  Ekvivalensklassene er følgende mengder, for $n \in \mathbb{N}$:
  $\{x : -n-1 < x \leq -n\}$ og $\{x : -1 < x < 1\}$ og $\{x : n \leq x < n+1\}$
  (Fasiten i boka sier $\{x : -n < x \leq -n+1\}$, men det blir feil for $n = 1$.)
- Partiell ordning? Nei, den er ikke antisymmetrisk.

Løsning

(f) "er et multippel av", på mengden av positive heltall

- Refleksiv? Ja, ethvert tall er et multippel av seg selv.
- Irrefleksiv? Nei, f.eks. er 2 et multippel av seg selv.
- Symmetrisk? Nei, 4 er et multippel av 2, og 2 er ikke et multippel av 4.
- Antisymmetrisk? Ja
  - Anta at $x = ay$ og at $y = bx$, for positive heltall x, y, a, b.
  - Da må $x = abx$.
  - Siden alle tallene er positive heltall, må $ab = 1$, og dermed må $a = 1$ og $b = 1$.
  - Siden $x = ay$, må $x = y$.
- Transitiv? Ja
  - Anta at $x = ay$ og at $y = bz$, for positive heltall x, y, z, a, b.
  - Da må $x = abz$, og x er et multippel av z.
- Ekvivalensrelasjon? Nei, den er ikke symmetrisk.
- Partiell ordning? Ja

Oppgave 5.21

Et dataprogram består av fem moduler: $M_1, M_2, \ldots, M_5$. En relasjon R på mengden av moduler er definert ved at $M_i R M_j$ hvis M_i er i kallsekvensen til M_j. Relasjonsmatrisen til R er denne:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \\
\mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\
\mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\
\mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \\
\mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

(a) Bekreft at R er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

(b) Hvilken modul er hovedprogrammet?

Løsning

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & T & F & T & T & F \\
2 & F & T & T & F & F \\
3 & F & F & T & F & F \\
4 & F & F & T & T & F \\
5 & F & F & T & T & T
\end{array}
$$

- R er refleksiv: Alle verdier på diagonalen er T.
- R er antisymmetrisk: Fordi ingen T speiles om diagonalen.
- R er transitiv: Vi må sjekke alle muligheter i matrisen.
- Hvilken modul er hovedprogrammet? Oppgaven sa at $M_i R M_j$ holder hvis M_i er i kallsekvensen til M_j. M_3 skiller seg ut. Den kaller på alle moduler og blir kun kalt på av seg selv. Dette må være hovedprogrammet.

Oppgave 6.1

Avgjør hvorvidt følgende funksjoner er veldefinerte. For de som er veldefinerte, gi definisjonsområdet, verdiområdet og bildemengden. [Se læreboken på side 107.]

Løsning

	Veldefinert?	Definisjonsområde	Verdiområde	Bildemengde
(a)	Ja	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
(b)	Nei, $g(1)$ er ikke i $\mathbb{J}$.			
(c)	Nei, $h(3) = 4$ er ikke i $\{1, 2, 3\}$.			
(d)	Ja	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
(e)	Ja	$\mathbb{R}$-$\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$-$\{0\}$
(f)	Nei, *ispositive*(0) er ikke definert.			
(g)	Ja	$\mathbb{N}$	$\mathbb{J}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
(h)	Nei, $\psi(a)$ er den tomme strengen og er ikke med i S.			

Oppgave på side 6, fra forelesningen 13/2

Vi definerer ofte symmetrisk differens ved

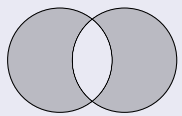
$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

a) Illustrer $A \triangle B$ ved et Venn-diagram.

b) Vis at $(A \triangle B) \triangle C$ kan illustreres ved Venn-diagrammet på neste side.

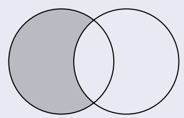
c) Drøft hvorfor dette viser at vi kunne skrevet $A \triangle B \triangle C$ uten bruk av parenteser.

Løsning (a)



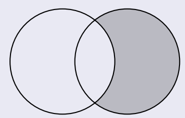
$A \triangle B$

er unionen av



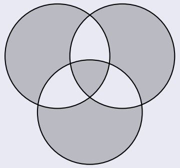
$A - B$

og

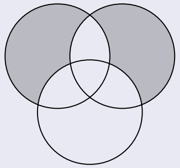


$B - A$

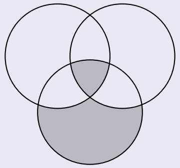
Løsning (b)



er unionen av



og

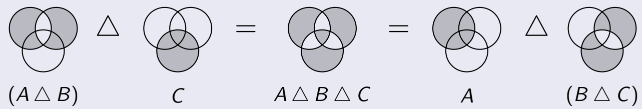


$(A \triangle B) \triangle C$ $\quad$ $(A \triangle B) - C$ $\quad$ $C - (A \triangle B)$

Symmetrisk differanse inverterer fargene.

Løsning (c)

- Vi har vist at $(A \triangle B) \triangle C$ kan tegnes med diagrammet .
- Det er lett å se at $A \triangle (B \triangle C)$ også har diagrammet .
- Vi kan illustrere det slik:

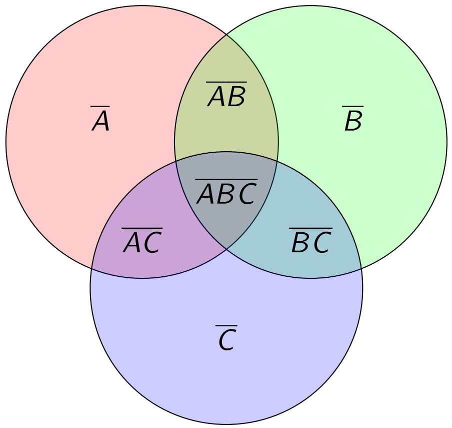


- Parantessettingen har ingenting å si for hvordan Venn-diagrammet ser ut.

Oppgave på side 8, fra forelesningen 13/2

- Vi bruker bare Venn-diagrammer for uttrykk med en, to eller tre mengder.
- Tegn et Venn-diagram for tre mengder A, B og C, og sett inn sannhetsverdiene for de tre basisutsagnene $x \in A$, $x \in B$ og $x \in C$ i de forskjellige feltene.

Vi skriver sannhetsverdiene for $x \in A$, $x \in B$ og $x \in C$ som henholdsvis $\overline{A}$, $\overline{B}$ og $\overline{C}$.



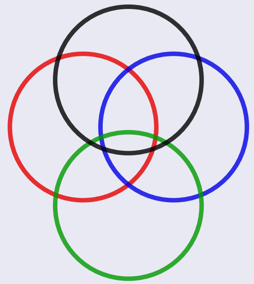
$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

Oppgave på side 8, fra forelesningen 13/2

- Undersøk hvor mange deler det er mulig å dele planet inn i ved hjelp av fire sirkler.
- Forklar hvorfor dette viser at Venn-diagrammer ikke er hensiktsmessige for Booleske uttrykk med mer enn tre mengder.

Løsning

- Med tre sirker får vi åtte områder, som svarer til de åtte mulige kombinasjonene.
- Hva med fire sirkler? Hvor mange områder kan vi dele planet opp i med fire sirkler?



14

- Hvis ellipser eller andre kurver er tillatt, klarer vi å lage Venn-diagrammer for fire (eller flere) mengder.

Oppgave på side 16, fra forelesningen 20/2

La A være en mengde og la R og S være ekvivalensrelasjoner på A.

La $T = S \cap R$

a) Forklar hvorfor vi har at aTb hvis og bare hvis $aRb \wedge aSb$ for alle a og b i A.

b) Vis at T er en ekvivalensrelasjon.

c) Finn et eksempel hvor $R \cup S$ ikke er en ekvivalensrelasjon.

Løsning

Denne løser vi i plenum på tavla.

Oppgave på side 23/24, fra forelesningen 20/2 (for spesielt interesserte)

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en preordning hvis R er transitiv og refleksiv.

Definer relasjonen S på A ved aSb når $aRb \wedge bRa$.

a) Vis at S er en ekvivalensrelasjon på A.

Der er vanlig å skrive A/S for mengden av ekvivalensklasser $E(a)$ til ekvivalensrelasjonen S.

Løsning (a)

- S er refleksiv:
  - La a være et vilkårlig element fra A.
  - Siden R er refleksiv, må aRa.
  - Da holder $aRa \wedge aRa$.
  - Da holder aSa.
- S er symmetrisk:
  - Anta at aSb, for vilkårlige elementer a og b fra A.
  - Da holder $aRb \wedge bRa$ per definisjon av S.
  - Da må bSa holde.
- S er transitiv:
  - Anta aSb og bSc, for vilkårlige elementer a, b og c fra A.
  - Per definisjon av S har vi $aRb \wedge bRa$ og $bRc \wedge cRb$.
  - Siden aRb og bRc, og R er transitiv, vil aRc.
  - Siden cRb og bRa, og R er transitiv, vil cRa.
  - Da holder $aRc \wedge cRa$, og dermed aSc.

Oppgave på side 23/24, fra forelesningen 20/2 (for spesielt interesserte)

Vi definerer en relasjon $\hat{R}$ på A/S ved

$$E(a)\hat{R}E(b)$$

om aRb

b) Vis at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene $E(a)$ og $E(b)$ vi bruker.

c) Vis at $\hat{R}$ er en partiell ordning på mengden av ekvivalensklasser.

Løsning (b)

- Anta at aRb, og at $a' \in E(a)$ og $b' \in E(b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at $a'Rb'$, for det betyr at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene vi bruker når vi definerer $\hat{R}$.
- Siden a og a' er i samme ekvivalensklasse, må aSa', det vil si aRa' og $a'Ra$.
- Siden b og b' er i samme ekvivalensklasse, må bSb', det vil si bRb' og $b'Rb$.
- $a'Ra$ og aRb gir at $a'Rb$, siden R er transitiv.
- $a'Rb$ og bRb' gir at $a'Rb'$, siden R er transitiv.
- Tegn figur!

Løsning (c)

- $\hat{R}$ er refleksiv, siden $E(a)\hat{R}E(a)$ holder for alle $E(a)$.
- $\hat{R}$ er transitiv:
  - Anta at $E(a)\hat{R}E(b)$ og $E(b)\hat{R}E(c)$.
  - Da må aRb og bRc.
  - Siden R er transitiv, må aRc.
  - Da må $E(b)\hat{R}E(c)$.
- $\hat{R}$ er antisymmetrisk.
  - Anta at $E(a)\hat{R}E(b)$ og $E(b)\hat{R}E(a)$.
  - Da må aRb og bRa.
  - Da må aSb.
  - Da må $E(a)$ og $E(b)$ være samme ekvivalensklasse.