MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 8: Diverse ukeoppgaver fra kapittel 6 & 7,mm.

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

27. mars 2008

Repetisjon

- Funksjoner - Viktige begreper
  - Argumenter og verdier
  - Definisjonsområdet til en funksjon
  - Verdiområdet til en funksjon
  - Bildet til en funksjon
  - Injektive funksjoner
  - Surjektive funksjoner
  - Sammensetning av funksjoner
  - Inverse funksjoner

Repetisjon

- Rekursjon og induksjon
  - Rekursive definisjoner
  - Induksjonsbevis
  - Induksjonsstart & induksjonsskritt
  - Rekurrenslikninger
  - Hvordan finne løsninger til rekurrenslikninger
  - Den karakteristiske likningen til en rekurrenslikning
  - Generell rekursjon og induksjon
  - Induktivt definerte mengder
  - Rekursjon over slike
  - Alfabet, ord, formelle språk, formler
  - Simultan rekursjon

Oppgave (fra forelesningen 25/2 på side 33)

a) Vis at hvis $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ begge har inverse f^{-1} og g^{-1}, så vil sammensetningen

$$h = g \circ f$$

også ha en invers.

b) Under antagelsene i a), vis at $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Løsning (a)

- Det går fint an å vise dette direkte, men vi kan også bruke det vi har lært om funksjoner.

(1) Vi har tidligere i kurset vist at en funksjon har en invers hvis og bare hvis den er injektiv og surjektiv. Det er derfor tilstrekkelig å vise at h er både injektiv og surjektiv.

- Ved (1), siden f og g begge har inverser, så må f og g være både injektive og surjektive.

(2) Vi har tidligere vist at hvis f og g er injektive, så er $g \circ f$ injektiv.

(3) Vi har tidligere vist at hvis f og g er surjektive, så er $g \circ f$ surjektiv.

- Ved (2) og (3) er h både injektiv og surjektiv.
- Ved (1) har h en invers.

Løsning (b)

- For å vise at $f^{-1} \circ g^{-1}$ er inversen til h, må vi vise at $h((f^{-1} \circ g^{-1})(z)) = z$ for alle $z \in Z$ og at $(f^{-1} \circ g^{-1})(h(x)) = x$ for alle $x \in X$.
- For å gjøre det må vi bruke at f^{-1} er inversen til f og at g^{-1} er inversen til g.
- $h((f^{-1} \circ g^{-1})(z)) = h(f^{-1}(g^{-1}(z))) = (g \circ f)(f^{-1}(g^{-1}(z))) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z$
- $(f^{-1} \circ g^{-1})(h(x)) = f^{-1}(g^{-1}(h(x))) = f^{-1}(g^{-1}((g \circ f)(x))) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$

Oppgave (fra forelesningen 3/3 på side 20)

- Vi vet at vi kan dele planet opp i to felter ved hjelp av en sirkel.
- Vi vet at to sirkler kan skjære hverandre i to punkter
- Vi vet at $2n$ punkter vil dele en sirkel opp i $2n$ buestykker.
- Bruk dette til å definere funksjonen $G(n)$ ved rekursjon, hvor $G(n)$ er antall områder vi kan dele planet opp i ved hjelp av n sirkler.
- Foreslå en formel for $G(n)$ og se om du kan vise den ved induksjon.

Løsning

- $G(1) = 2$, siden én sirkel gir to områder.
- Hvis n sirkler deler planet opp i $G(n)$ områder, må vi se på hva som skjer når vi legger til en ny sirkel.
- Siden den nye sirkelen vil skjære hver av de andre n sirklene høyst 2 steder, så får vi høyst $2n$ nye skjæringspunkter.
- Disse skjæringspunktene deler den nye sirkelen inn i $2n$ buestykker, og hvert av disse buestykkene kan dele et av de gamle områdene inn i to.
- Vi kan altså få $2n$ *nye* områder når vi legger til sirkel nummer $n + 1$.
- Det betyr at $G(n + 1) = G(n) + 2n$

Løsning

- Hvis vi skal tippe på en formel direkte, så ser vi at $G(n)$ ligger ganske nærme n^2.

n	$G(n)$	n^2	$G(n)-n^2$
1	2	1	1
2	4	4	0
3	8	9	-1
4	14	16	-2
5	22	25	-3
6	32	36	-4

- Vi ser at differansen mellom $G(n)$ og n^2 er $-n+2$.
- Vi tipper derfor på formelen $G(n) = n^2 - n + 2$.
- Vi viser at $G(n) = n^2 - n + 2$ ved induksjon.

Løsning

- Basissteget er å vise at formelen $G(n) = n^2 - n + 2$ holder for $n = 1$: $G(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2$, som stemmer.
- Vi antar så at $G(n) = n^2 - n + 2$. Det er *induksjonshypotesen*.
- *Induksjonssteget* går ut på å vise at $G(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + 2$.
- Vi regner på følgende måte:

$$\begin{aligned} G(n+1) &= G(n) + 2n && \text{(ved antakelse)} \\ &= (n^2 - n + 2) + 2n && \text{(ved induksjonshypotese)} \\ &= n^2 + n + 2 \\ &= (n^2 + 2n + 1) - n + 1 \\ &= (n+1)^2 - n + 1 \\ &= (n+1)^2 - (n+1) + 2 \end{aligned}$$

Oppgave 7.6

Finn en rekursiv og en ikke-rekursiv definisjon av sekvensen

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots$$

Løsning

- En rekursiv definisjon er slik:
  - $f(1) = 2$
  - $f(n+1) = f(n) + 5$
- En ikke-rekursiv definisjon er slik:
  - $g(n) = 5n - 3$

Oppgave 7.12 (b)

Vis ved induksjon at følgende påstand er sann for alle naturlige tall n.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Løsning

Vi viser først at påstanden holder for $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Løsning

Vi antar så at påstanden holder for $n = k$ (det er vår induksjonshypotese) og viser at den holder for $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
&1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad \text{(ved induksjonshypotesen)} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)(k+1)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Oppgave 7.12 (c)

Vis ved induksjon at følgende påstand er sann for alle naturlige tall n.

$$n^3 - n \text{ er delelig med } 3$$

Løsning

Vi viser først at påstanden holder for $n = 1$.

$$1^3 - 1 = 0 \text{ er delelig med } 3$$

Løsning

- Vi antar så at påstanden holder for $n = k$.
- Det er *induksjonshypotesen*.
- Vi viser så at påstanden holder for $n = k + 1$.
- Induksjonshypotesen sier i dette tilfellet at $k^3 - k$ er delelig med 3.
- Vi kan derfor anta at det fins et naturlig tall p slik at $k^3 - k = 3p$.

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\
&= k^3 + 3k^2 + 2k \\
&= (k^3 - k) + 3k^2 + 3k \\
&= 3p + 3(k^2 + k) \qquad \text{(ved induksjonshypotesen)} \\
&= 3(p + k^2 + k)
\end{aligned}$$

- Da må $(k+1)^3 - (k+1)$ være delelig på 3 og påstanden holder.

Oppgave 7.20

(Om å gjøre induksjonsbevis ved å starte med $n = 0$.)

(a) Bevis at $(6^n - 1)/5$ er et heltall for $n \geq 0$, ved å bruke $n = 0$ som induksjonsstart.

(b) Forklar problemet ved å vise at $2^n > n$ for $n \geq 0$ ved induksjon hvor $n = 0$ er induksjonsstarten.

(c) Bruk induksjon på en annen måte for å vise at $2^n > n$ for $n \geq 0$.

Løsning (a)

Induksjonsstarten er å vise at $\frac{6^n-1}{5}$ er et heltall for $n=0$:

$$\frac{6^n-1}{5} = \frac{6^0-1}{5} = \frac{1-1}{5} = 0 \text{ er et heltall}$$

Løsning (a)

Induksjonsskrittet er å vise at hvis $\frac{6^k-1}{5}$ er et heltall, så er $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ et heltall.

- Vi antar at $\frac{6^k-1}{5}$ er et heltall.
- Vi skal komme frem til at $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ er et heltall.
- La oss gange hele uttrykket med 6.
- Da får vi også et heltall, $\frac{6(6^k-1)}{5}$.
- Da må $\frac{6^{k+1}-6}{5}$ være et heltall.
- Men, $\frac{6^{k+1}-6}{5} = \frac{6^{k+1}-1}{5} - \frac{5}{5}$.
- Da må også $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ være et heltall

Løsning (b)

"Forklar problemet ved å vise at $2^n > n$ for $n \geq 0$ ved induksjon hvor $n = 0$ er induksjonsstarten."

- La oss forsøke!
- Induksjonsstarten er å vise at $2^n > n$ holder for $n = 0$.
- Det er greit, for vi har $2^0 = 1 > 0$
- Induksjonsskrittet begynner med å anta at $2^n > n$ holder for $n = k$.
- Induksjonshypotesen er derfor at $2^k > k$.
- Vi må vise at $2^n > n$ holder for $n = k+1$, det vil si at $2^{k+1} > k+1$.
- Ved å multiplisere med 2 på begge sider, får vi $2^{k+1} > 2k$.
- Hvis $2k \geq k+1$ holder, så er vi i mål, siden $2^{k+1} > 2k \geq k+1$.
- Men, $2k \geq k+1$ holder kun hvis $k > 0$!
- (For hvis $k = 0$, så vil $2k = 0$ og $k+1 = 1$.)

Løsning (c)

"Bruk induksjon på en annen måte for å vise at $2^n > n$ for $n \geq 0$."

- Induksjonsstarten er den samme: $2^0 = 1 > 0$
- Vi viser induksjonsskrittet på en annen måte.
- Vi antar på samme måte at $2^n > n$ holder for $n = k$.
- Vi må vise at $2^n > n$ holder for $n = k+1$, det vil si at $2^{k+1} > k+1$.
- Induksjonshypotesen gir at $2^k > k$.
- I stedet for å gange med 2 på begge sider, kan vi *summere* med 2^k på begge sider.
- Vi får da $2^k + 2^k > k + 2^k$.
- Vi har at $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, så $2^{k+1} > k + 2^k$.
- Vi har at $2^k \geq 1$, så $k + 2^k \geq k+1$.
- Vi får dermed at $2^{k+1} > k+1$.

Oppgave 7.23

Løs følgende rekurrenslikninger

(a) $t(n) - 5t(n-1) + 4t(n-2) = 0$, $t(1) = 2$, $t(2) = -1$

Løsning

- Den karakteristiske likningen til likningen er $x^2 - 5x + 4 = 0$.
- Vi kan skrive $(x-1)(x-4) = 0$.
- $x = 1$ og $x = 4$ er løsninger av denne likningen.
- Den generelle løsningen til rekurrenslikningen er $t(n) = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n$
- $t(1) = 2$ gir $A + 4B = 2$
- $t(2) = -1$ gir $A + 16B = -1$
- Vi får $2 - 4B = -1 - 16B$ og $3 = -12B$ og $B = -\frac{1}{4}$
- Ved å sette inn $B = -\frac{1}{4}$ i $A + 4B = 2$ får vi $A = 3$.
- Løsningen er derfor $t(n) = 3 + (-\frac{1}{4})4^n$