Plenumsregning 9

Diverse ukeoppgaver

Roger Antonsen - 10. april 2008

Oppgaver fra forelesningene

Oppgave (fra forelesningen 10/3).

a) Ved å bruke den rekursive definisjonen av PL, vis hvordan vi skritt for skritt kan finne verdiene av
   - $\mathsf{PL}(e, \mathrm{d})$
   - $\mathsf{PL}(\mathrm{a}, \mathrm{d})$
   - $\mathsf{PL}(\mathrm{ab}, \mathrm{d})$
   - $\mathsf{PL}(\mathrm{aba}, \mathrm{d})$

   Husk at *variablene* $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{b}$ kan stå for hvilken som helst av *bokstavene* a, b og d.

b) Vis, ved å bruke definisjonen av R og egenskapen til PL, at $\mathsf{R}(\mathrm{abac}) = \mathrm{caba}$.

Definisjonene av PL og R

Definisjon.
- $\mathsf{PL}(e, \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$
- $\mathsf{PL}(w\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \mathsf{PL}(w, \mathfrak{a})\mathfrak{b}$

$\mathsf{PL}(w, \mathfrak{a})$ blir ordet $\mathfrak{a}w$, for alle ord w. Vi viser det induksjon etterpå, som en øvelse.

Definisjon.
- $\mathsf{R}(e) = e$
- $\mathsf{R}(w\mathfrak{b}) = \mathsf{PL}(\mathsf{R}(w), \mathfrak{b})$

$\mathsf{R}(w)$ blir speilvendingen av ordet w.

Løsning

a)
- $\mathrm{PL}(e, d) = d$
- $\mathrm{PL}(a, d) = \mathrm{PL}(ea, d) = \mathrm{PL}(e, d)a = da$
- $\mathrm{PL}(ad, d) = \mathrm{PL}(a, d)d = dad$
- $\mathrm{PL}(aba, d) = \mathrm{PL}(ab, d)a = \mathrm{PL}(a, d)ba = \mathrm{PL}(e, d)aba = daba$

b)

$$\begin{aligned} R(abac) &= \mathrm{PL}(R(aba), c) \\ &= cR(aba) = c\mathrm{PL}(R(ab), a) \\ &= caR(ab) = ca\mathrm{PL}(R(a), b) \\ &= cabR(a) = cab\mathrm{PL}(R(e), a) \\ &= cabaR(e) = caba \end{aligned}$$

Oppgave (Øvelse i indukssjonsbevis)
Vis ved induksjon på lengden av ord at $\mathrm{PL}(w, a) = aw$.

Løsning

- Induksjonsstarten er at påstanden holder når $w = e$.
  - Da er $\mathrm{PL}(w, a) = \mathrm{PL}(e, a) = a = aw$.
- Induksjonsskrittet:
  - Anta at påstanden holder for ord w av lengde n.
  - Det er vår induksjonshypotese.
  - Anta at vi har et ord wb av lengde $n + 1$, hvor b er en bokstav.
  - Vi må vise at: $\mathrm{PL}(wb, a) = awb$
  - Vi har $\mathrm{PL}(wb, a) = \mathrm{PL}(w, a)b$ ved definisjonen av PL.
  - Ved induksjonshypotesen har vi $\mathrm{PL}(w, a) = aw$.
  - Da har vi $\mathrm{PL}(wb, a) = \mathrm{PL}(w, a)b = awb$.

Oppgave fra forelesningen 12/3
La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : \mathrm{HF} \to \mathrm{HF}$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

a) Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

b) La $X, Y \in HF$.
Vis at $X \in Y \Rightarrow f(X) < f(Y)$.

c) Forklar hvorfor det ikke finnes noen $X \in HF$ slik at $X \in X$

d) La $N \subseteq HF$ være den minste mengden slik at $\emptyset \in N$ og slik at hvis $X \in N$ så vil $S(X) \in N$.
Drøft sammenhengen mellom N og $\mathbb{N}_0$.

Definisjonen av HF (fra forelesningen)

- Vi definerer de hereditært endelige mengdene HF som den minste mengden slik at
  - $\emptyset \in HF$
  - Hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ er en endelig delmengde av HF, så er $X \in HF$.
- Vi definerer $f : HF \to \mathbb{N}_0$ ved rekursjon over HF ved
  - $f(\emptyset) = 0$
  - $f(\{a_1, \ldots, a_n\}) = 2^{f(a_1)} + \cdots + 2^{f(a_n)}$.

  Her må vi anta at mengden er beskrevet uten gjentagelse, det vil si at alle a_i'ene er forskjellige.

Eksempel. $\emptyset \in HF$, $\{\emptyset\} \in HF$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in HF$, $\{\{\emptyset\}\} \in HF$, ...

Husk at $S : HF \to HF$ er definert ved $S(X) = X \cup \{X\}$.

Løsning (a)
Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

- Anta at $X \in HF$.
- Da må $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ være en endelig delmengde av HF (fordi HF er definert som den *minste* mengden som oppfyller de to kravene).
- Da er $S(X) = X \cup \{X\} = \{a_1, \ldots, a_n, X\}$, som også er en endelig delmengde av HF.
- Da må $S(X) \in HF$.

Husk at $f(\emptyset) = 0$ og $f(\{a_1, \ldots, a_n\}) = 2^{f(a_1)} + \cdots + 2^{f(a_n)}$.

Løsning (b)
La $X, Y \in HF$. Vis at $X \in Y \Rightarrow f(X) < f(Y)$.

- Anta at $Y = \{a_1, \ldots, a_n, X\}$.
- Da vil $f(Y) = f(\{a_1, \ldots, a_n, X\}) = 2^{f(a_1)} + \cdots + 2^{f(a_n)} + 2^{f(X)}$
- Siden $f(X) < 2^{f(X)} \leqslant f(Y)$, har vi $f(X) < f(Y)$.

Løsning (c)
Forklar hvorfor det ikke finnes noen $X \in HF$ slik at $X \in X$

- Hvis $X \in X$, så gir (b) at $f(X) < f(X)$, men det er umulig.

Løsning (d)
La $N \subseteq HF$ være den minste mengden slik at $\emptyset \in N$ og slik at hvis $X \in N$ så vil $S(X) \in N$. Drøft sammenhengen mellom N og $\mathbb{N}_0$.

- N og $\mathbb{N}_0$ er essensielt like strukturer. Vi kan definere en en-til-en-korrespondanse mellom elementene på følgende måte.

$$
\begin{array}{lcllcl}
0 & \leftrightsquigarrow & \emptyset & & = & \emptyset \\
1 & \leftrightsquigarrow & S(\emptyset) & & = & \{\emptyset\} \\
2 & \leftrightsquigarrow & S(S(\emptyset)) & & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 & \leftrightsquigarrow & S(S(S(\emptyset))) & & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{array}
$$

- Mer presist, la $s : \mathbb{N}_0 \to N$ være definert ved rekursjon over $\mathbb{N}_0$ på følgende måte.
  - $s(0) = \emptyset$
  - $s(n+1) = S(s(n))$
- Det vil si, $s(n)$ er resultatet av å anvende S n ganger på $\emptyset$.
- Denne funksjonen er surjektiv og injektiv.

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Oppgave - Ekstraoppgave 1 til uke 13
La $f(w)$ være summen av antall forekomster av a og b i w minus to ganger antall forekomster av c.

a) Vis hvordan vi kan definere f ved rekursjon på oppbyggingen av w.

b) Finn en pseudokode for en algoritme som beregner f.

Løsning (Ekstraoppgave 1a til uke 13)

- $f(e) = 0$
- $f(aw) = 1 + f(w)$
- $f(bw) = 1 + f(w)$
- $f(cw) = 2 + f(w)$

Løsning (Ekstraoppgave 1b til uke 13)

1. Input n
2. Input $w = v_1, \dots, v_n$
3. $sum \leftarrow 0$
4. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   4.1. **If** $v_i = a$ **or** $v_i = b$ **then**
      4.1.1. $sum \leftarrow sum + 1$
      else [her vil $v_i = c$]
      4.1.2. $sum \leftarrow sum + 2$
5. Output sum

Løsning (Ekstraoppgave 1b til uke 13)
Det er fristende å skrive denne litt annerledes.

1. Input w
2. $sum \leftarrow 0$
3. **While** $w \neq e$ **do** [e er det *tomme* ordet]
   3.1. $x \leftarrow$ første bokstav i w [x er enten a, b eller c]
   3.2. $r \leftarrow$ resten av w
   3.3. **If** $x = a$ **or** $x = b$ **then**
      3.3.1. $sum \leftarrow sum + 1$
      else [her vil $x = c$]
      3.3.2. $sum \leftarrow sum + 2$
   3.4. $w \leftarrow r$
4. Output sum

Oppgave - Ekstraoppgave 2 til uke 13
La A være et utsagn på svak normalform, hvor vi antar at vi bare bruker utsagnsvariablene p, q og r.
Vi lar A^* være formelen vi får ved å erstatte alle forekomster av p, q og r med $\neg p$, $\neg q$ og $\neg r$, alle forekomster av $\wedge$ med $\vee$ og alle forekomster av $\vee$ med $\wedge$.

a) Vis hvordan vi kan definere A^* ved rekursjon på oppbyggingen av A (husk at vi har et tilfelle $A = \neg B$ også).
b) Vis ved induksjon at
$$A^* \Leftrightarrow \neg A$$

Løsning (Ekstraoppgave 2a til uke 13)
En rekursiv definisjon av *:

- $v^* = \neg v$, når v er en utsagnsvariabel
- $(B \wedge C)^* = (B^* \vee C^*)$
- $(B \vee C)^* = (B^* \wedge C^*)$
- $(\neg B)^* = \neg(B^*)$

Løsning (Ekstraoppgave 2b til uke 13)
Viser at $A^* \Leftrightarrow \neg A$ ved induksjon på formler på svak normalform.

- Induksjonsstart er at $A^* \Leftrightarrow \neg A$ holder når A er en utsagnsvariabel.
  - Vi viser først $\Rightarrow$-retningen:
  - Anta at v^* er sann, hvor v er en utsagnsvariabel
  - Siden $v^* = \neg v$, må $\neg v$ også være sann.
  - Vi viser så $\Leftarrow$-retningen:
  - Anta at $\neg v$ er sann, hvor v er en utsagnsvariabel
  - Siden $\neg v = v^*$, må v^* også være sann.

Løsning
- Induksjonsskrittet er tredelt, for hvis A ikke er en utsagnsvariabel, så er A enten på formen $B \wedge C$, $B \vee C$ eller $\neg B$.
- I alle tilfellene er *induksjonshypotesen* at påstanden holder for B og C.

- Induksjonshypotesen sier at $B^* \Leftrightarrow \neg B$ og $C^* \Leftrightarrow \neg C$ holder.
- Vi viser først at påstanden holder hvis A er på formen $(B \land C)$.

Løsning

- Vi viser først $\Rightarrow$-retningen:
  - Anta at $(B \land C)^*$ er sann.
  - Da er $B^* \lor C^*$ sann, ved definisjonen av *.
  - Da er enten B^* eller C^* sann, ved sannhetsbetingelsen for $\lor$-formler.
  - Da er enten $\neg B$ eller $\neg C$ sann, ved induksjonshypotesen.
  - Da er ikke både B og C sanne, ved sannhetsbetingelsen for $\neg$-formler.
  - Da er $\neg(B \land C)$ sann, ved sannhetsbetingelsen for $\land$-formler.
- Vi viser så $\Leftarrow$-retningen:
  - Anta at $\neg(B \land C)$ sann.
  - Da er ikke både B og C sanne, ved sannhetsbetingelsen for $\land$-formler.
  - Da er enten $\neg B$ eller $\neg C$ sann, ved sannhetsbetingelsen for $\neg$-formler.
  - Da er enten B^* eller C^* sann, ved induksjonshypotesen.
  - Da er $B^* \lor C^*$ sann, ved sannhetsbetingelsen for $\lor$-formler.
  - Da er $(B \land C)^*$ sann, ved definisjonen av *.

Løsning

- Vi viser så at påstanden holder hvis A er på formen $(B \lor C)$.
  - Denne gangen viser vi begge retninger samtidig via en rekke ekvivalenser.

$$
\begin{aligned}
(B \lor C)^* &\Leftrightarrow B^* \land C^* \text{ (ved definisjon av } ^*\text{)} \\
&\Leftrightarrow \neg B \land \neg C \text{ (ved IH og sannhetsbetingelsen for } \land\text{-formler)} \\
&\Leftrightarrow \neg(B \lor C) \text{ (ved sannhetsbetingelsene for } \lor\text{- og } \neg\text{-formler)}
\end{aligned}
$$

- Hvis A er på formen $\neg B$ får vi:

$$
\begin{aligned}
(\neg B)^* &\Leftrightarrow \neg(B^*) \text{ (ved definisjon av } ^*\text{)} \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg B) \text{ (ved induksjonshypotesen)}
\end{aligned}
$$

Oppgave - Ekstraoppgave 3 til uke 13
La U være mengden av utsagnslogiske formler i utsagnsvariablene p, q og r, hvor vi bare bruker bindeordene $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.
Dette er det formelle språket som er beskrevet på forelesningene.

a) Finn en rekursiv definisjon av funksjonen f hvor $f(A)$ er antall parenteser i A.
b) Skriv ut argumentet for at $f(A)$ alltid er et partall som et induksjonsbevis.

Løsning (Ekstraoppgave 3a til uke 13)

- $f(v) = 0$, hvor v er en utsagnsvariabel
- $f(\neg B) = f(B)$
- $f((B \wedge C)) = 2 + f(B) + f(C)$
- $f((B \vee C)) = 2 + f(B) + f(C)$

Løsning (Ekstraoppgave 3b til uke 13)

- Vi viser ved induksjon over formler at $f(A)$ er et partall.
- Induksjonsstart er at $f(v)$, hvor v er en utsagnsvariabel, er et partall.
- Det holder fordi $f(v) = 0$.
- Induksjonsskrittet er igjen tredelt.
- Vi viser tilfellet for $A = (B \wedge C)$ og tar eventuelt resten på tavla.
- Hvis $A = (B \wedge C)$, får vi $f(A) = f((B \wedge C)) = 2 + f(B) + f(C)$.
- Ved induksjonshypotesen er $f(B)$ og $f(C)$ partall.
- Da må $f(A)$ også være et partall.

Oppgave - Ekstraoppgave 4 til uke 13
Vi kan definere mengden av korrekte uttrykk med to sett (,) og [,] av parenteser ved følgende kortform

- $P ::= e|(P)|[P]|PP$

a) Formuler denne definisjonen som en induktiv definisjon uten bruk av denne spesielle notasjonen, dvs. bruk formuleringen "den minste mengden slik at".
b) Formuler, etter beste evne, et kriterium for når et ord med symbolene (,), [og] er korrekt, slik at kriteriet kan brukes som grunnlag for en algoritme som tester dette.

c) Finn en pseudokode for en algoritme som tester om et ord er et korrekt parentesuttrykk i denne betydningen.

Hint: Du trenger en hjelpevariabel som skal "huske" hva som mangler for at en del av ordet skal bli korrekt. Du vil sannsynligvis måtte la denne variabelen ta ord i et egnet alfabet som verdier.

Løsning (Ekstraoppgave 4a til uke 13)
La X være den minste mengden slik at følgende holder:

- $e \in X$
- $P \in X \Rightarrow (P) \in X$
- $P \in X \Rightarrow [P] \in X$
- $P \in X$ og $Q \in X \Rightarrow PQ \in X$

Løsning (Ekstraoppgave 4b til uke 13)

- X består av ord slik at parentesene er *balanserte*.
- Et kriterium for når et ord P er korrekt er følgende:
  - Anta at vi leser P fra venstre mot høyre.
  - Samtidig som vi leser ordet lager vi et nytt ord Q som består av kun venstreparenteser.
  - Hver gang vi treffer en venstreparentes legger vi denne til Q.
  - Da blir Q til enten $Q($ eller $Q[$.
  - Hver gang vi treffer en høyreparentes sjekker vi følgende.
  - Hvis Q er tom, så er ikke P korrekt. Avslutt.
  - Hvis høyreparentesen er av samme type som den siste venstreparentesen i Q, så fjern denne venstreparentesen fra Q og fortsett.
  - Hvis den ikke er samme type, så er ikke P korrekt. Avslutt.
  - Hvis vi klarer å lese alle parentesene på denne måten, og Q er tom til slutt, så er P korrekt.
  - Hvis Q ikke er tom, så er ikke P godkjent.

Repetisjon av rekurrenslikninger

- Vi repeterer raskt alle definisjonene og teoremene fra forelesningene om rekurrenslikninger.
- Vi diskuterer eventuelle vanskeligheter og regner på tavla hvis det trengs.

- Deretter løser vi noen av oppgavene fra boka.

Oppgave 7.23
Løs følgende rekurrenslikninger

(b) $t(n) - 2t(n-1) - 8t(n-2) = 0$, $t(1) = 1$, $t(2) = 0$

- Vi løser denne, og tar eventuelt flere på tavla.

Løsning (b)

- Den karakteristiske likningen til likningen er $x^2 - 2x - 8 = 0$.
- Vi kan skrive $(x+2)(x-4) = 0$.
- $x = -2$ og $x = 4$ er løsninger av denne likningen.
- Den generelle løsningen til rekurrenslikningen er $t(n) = A \cdot (-2)^n + B \cdot 4^n$
- $t(1) = 1$ gir $-2A + 4B = 1$
- $t(2) = 0$ gir $4A + 16B = 0$
- Fra $-2A + 4B = 1$ får vi $4A = 8B - 2$, og dermed $8B - 2 + 16B = 0$, som gir $24B = 2$ og $B = \frac{1}{12}$
- Ved å sette inn $B = \frac{1}{12}$ i $-2A + 4B = 1$ får vi $-2A + \frac{1}{3} = 1$ og $A = -\frac{1}{3}$.
- Løsningen er derfor $t(n) = -\frac{1}{3} \cdot (-2)^n + \frac{1}{12} \cdot 4^n$.