

MAT1030 – Diskret matematikk

Plenumsregning 9: Diverse ukeoppgaver

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

10. april 2008



Oppgaver fra forelesningene

Oppgave (fra forelesningen 10/3)

- a) Ved å bruke den rekursive definisjonen av PL , vis hvordan vi skritt for skritt kan finne verdiene av
- $PL(e, d)$
 - $PL(a, d)$
 - $PL(ab, d)$
 - $PL(aba, d)$
- Husk at *variablene* a og b kan stå for hvilken som helst av *bokstavene* a , b og d .
- b) Vis, ved å bruke definisjonen av R og egenskapen til PL , at $R(abac) = caba$.

Definisjonene av PL og R

Definisjon

- $PL(e, a) = a$
- $PL(wb, a) = PL(w, a)b$

$PL(w, a)$ blir ordet aw , for alle ord w . Vi viser det induksjon etterpå, som en øvelse.

Definisjon

- $R(e) = e$
- $R(wb) = PL(R(w), b)$

$R(w)$ blir speilvingingen av ordet w .

Løsning

- a)
- $PL(e, d) = d$
 - $PL(a, d) = PL(ea, d) = PL(e, d)a = da$
 - $PL(ad, d) = PL(a, d)d = dad$
 - $PL(aba, d) = PL(ab, d)a = PL(a, d)ba = PL(e, d)aba = daba$

b)

$$\begin{aligned} R(abac) &= PL(R(aba), c) \\ &= cR(aba) = cPL(R(ab), a) \\ &= caR(ab) = caPL(R(a), b) \\ &= cabR(a) = cabPL(R(e), a) \\ &= cabaR(e) = caba \end{aligned}$$

Oppgave (Øvelse i induksjonsbevis)

Vis ved induksjon på lengden av ord at $PL(w, a) = aw$.

Løsning

- Induksjonsstarten er at påstanden holder når $w = e$.
 - Da er $PL(w, a) = PL(e, a) = a = aw$.
- Induksjonsskrittet:
 - Anta at påstanden holder for ord w av lengde n .
 - Det er vår induksjonshypotese.
 - Anta at vi har et ord wb av lengde $n + 1$, hvor b er en bokstav.
 - Vi må vise at: $PL(wb, a) = awb$
 - Vi har $PL(wb, a) = PL(w, a)b$ ved definisjonen av PL .
 - Ved induksjonshypotesen har vi $PL(w, a) = aw$.
 - Da har vi $PL(wb, a) = PL(w, a)b = awb$.

Oppgaver fra forelesningene

Oppgave fra forelesningen 12/3

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \rightarrow HF$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

- Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.
- La $X, Y \in HF$.
Vis at $X \in Y \Rightarrow f(X) < f(Y)$.
- Forklar hvorfor det ikke finnes noen $X \in HF$ slik at $X \in X$.
- La $N \subseteq HF$ være den minste mengden slik at $\emptyset \in N$ og slik at hvis $X \in N$ så vil $S(X) \in N$.
Drøft sammenhengen mellom N og \mathbb{N}_0 .

Definisjonen av HF (fra forelesningen)

- Vi definerer de **hereditært endelige mengdene** HF som den minste mengden slik at
 - $\emptyset \in HF$
 - Hvis $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ er en endelig delmengde av HF , så er $X \in HF$.
- Vi definerer $f : HF \rightarrow \mathbb{N}_0$ ved rekursjon over HF ved
 - $f(\emptyset) = 0$
 - $f(\{a_1, \dots, a_n\}) = 2^{f(a_1)} + \dots + 2^{f(a_n)}$.

Her må vi anta at mengden er beskrevet uten gjentakelse, det vil si at alle a_i 'ene er forskjellige.

Eksempel

$\emptyset \in HF, \{\emptyset\} \in HF, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in HF, \{\{\emptyset\}\} \in HF, \dots$

Husk at $S : HF \rightarrow HF$ er definert ved $S(X) = X \cup \{X\}$.

Løsning (a)

Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

- Anta at $X \in HF$.
- Da må $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ være en endelig delmengde av HF (fordi HF er definert som den *minste* mengden som oppfyller de to kravene).
- Da er $S(X) = X \cup \{X\} = \{a_1, \dots, a_n, X\}$, som også er en endelig delmengde av HF .
- Da må $S(X) \in HF$.

Husk at $f(\emptyset) = 0$ og $f(\{a_1, \dots, a_n\}) = 2^{f(a_1)} + \dots + 2^{f(a_n)}$.

Løsning (b)

La $X, Y \in HF$. Vis at $X \in Y \Rightarrow f(X) < f(Y)$.

- Anta at $Y = \{a_1, \dots, a_n, X\}$.
- Da vil $f(Y) = f(\{a_1, \dots, a_n, X\}) = 2^{f(a_1)} + \dots + 2^{f(a_n)} + 2^{f(X)}$
- Siden $f(X) < 2^{f(X)} \leq f(Y)$, har vi $f(X) < f(Y)$.

Løsning (c)

Forklar hvorfor det ikke finnes noen $X \in HF$ slik at $X \in X$

- Hvis $X \in X$, så gir (b) at $f(X) < f(X)$, men det er umulig.

Løsning (d)

La $N \subseteq HF$ være den minste mengden slik at $\emptyset \in N$ og slik at hvis $X \in N$ så vil $S(X) \in N$. Drøft sammenhengen mellom N og \mathbb{N}_0 .

- N og \mathbb{N}_0 er essensielt like strukturer. Vi kan definere en en-til-en-korrespondanse mellom elementene på følgende måte.

$$\begin{array}{lll} 0 & \rightsquigarrow & \emptyset & = & \emptyset \\ 1 & \rightsquigarrow & S(\emptyset) & = & \{\emptyset\} \\ 2 & \rightsquigarrow & S(S(\emptyset)) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 & \rightsquigarrow & S(S(S(\emptyset))) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{array}$$

- Mer presist, la $s : \mathbb{N}_0 \rightarrow N$ være definert ved rekursjon over \mathbb{N}_0 på følgende måte.
 - $s(0) = \emptyset$
 - $s(n+1) = S(s(n))$
- Det vil si, $s(n)$ er resultatet av å anvende S n ganger på \emptyset .
- Denne funksjonen er surjektiv og injektiv.

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Oppgave - Ekstraoppgave 1 til uke 13

La $f(w)$ være summen av antall forekomster av a og b i w minus to ganger antall forekomster av c .

- Vis hvordan vi kan definere f ved rekursjon på oppbyggingen av w .
- Finn en pseudokode for en algoritme som beregner f .

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning (Ekstraoppgave 1a til uke 13)

- $f(e) = 0$
- $f(aw) = 1 + f(w)$
- $f(bw) = 1 + f(w)$
- $f(cw) = 2 + f(w)$

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning (Ekstraoppgave 1b til uke 13)

1. Input n
2. Input $w = v_1, \dots, v_n$
3. $sum \leftarrow 0$
4. **For** $i = 1$ **to** n **do**
 - 4.1. **If** $v_i = a$ **or** $v_i = b$ **then**
 - 4.1.1. $sum \leftarrow sum + 1$
 - else** [her vil $v_i = c$]
 - 4.1.2. $sum \leftarrow sum + 2$
5. Output sum

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning (Ekstraoppgave 1b til uke 13)

Det er fristende å skrive denne litt annerledes.

1. Input w
2. $sum \leftarrow 0$
3. **While** $w \neq e$ **do** [e er det *tomme* ordet]
 - 3.1. $x \leftarrow$ første bokstav i w [x er enten a , b eller c]
 - 3.2. $r \leftarrow$ resten av w
 - 3.3. **If** $x = a$ **or** $x = b$ **then**
 - 3.3.1. $sum \leftarrow sum + 1$
 - else** [her vil $x = c$]
 - 3.3.2. $sum \leftarrow sum + 2$
 - 3.4. $w \leftarrow r$
4. Output sum

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Oppgave - Ekstraoppgave 2 til uke 13

La A være et utsagn på svak normalform, hvor vi antar at vi bare bruker utsagnsvariablene p , q og r .

Vi lar A^* være formelen vi får ved å erstatte alle forekomster av p , q og r med $\neg p$, $\neg q$ og $\neg r$, alle forekomster av \wedge med \vee og alle forekomster av \vee med \wedge .

- a) Vis hvordan vi kan definere A^* ved rekursjon på oppbyggingen av A (husk at vi har et tilfelle $A = \neg B$ også).
- b) Vis ved induksjon at

$$A^* \Leftrightarrow \neg A$$

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning (Ekstraoppgave 2a til uke 13)

En rekursiv definisjon av $*$:

- $v^* = \neg v$, når v er en utsagnsvariabel
- $(B \wedge C)^* = (B^* \vee C^*)$
- $(B \vee C)^* = (B^* \wedge C^*)$
- $(\neg B)^* = \neg(B^*)$

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning (Ekstraoppgave 2b til uke 13)

Viser at $A^* \Leftrightarrow \neg A$ ved induksjon på formler på svak normalform.

- Induksjonsstart er at $A^* \Leftrightarrow \neg A$ holder når A er en utsagnsvariabel.
 - Vi viser først \Rightarrow -retningen:
 - Anta at v^* er sann, hvor v er en utsagnsvariabel
 - Siden $v^* = \neg v$, må $\neg v$ også være sann.
 - Vi viser så \Leftarrow -retningen:
 - Anta at $\neg v$ er sann, hvor v er en utsagnsvariabel
 - Siden $\neg v = v^*$, må v^* også være sann.

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning

- Induksjonsskrittet er tredelt, for hvis A ikke er en utsagnsvariabel, så er A enten på formen $B \wedge C$, $B \vee C$ eller $\neg B$.
- I alle tilfellene er *induksjonshypotesen* at påstanden holder for B og C .
- Induksjonshypotesen sier at $B^* \Leftrightarrow \neg B$ og $C^* \Leftrightarrow \neg C$ holder.
- Vi viser først at påstanden holder hvis A er på formen $(B \wedge C)$.

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning

- Vi viser først \Rightarrow -retningen:
 - Anta at $(B \wedge C)^*$ er sann.
 - Da er $B^* \vee C^*$ sann, ved definisjonen av $*$.
 - Da er enten B^* eller C^* sann, ved sannhetsbetingelsen for \vee -formler.
 - Da er enten $\neg B$ eller $\neg C$ sann, ved induksjonshypotesen.
 - Da er ikke både B og C sanne, ved sannhetsbetingelsen for \neg -formler.
 - Da er $\neg(B \wedge C)$ sann, ved sannhetsbetingelsen for \wedge -formler.
- Vi viser så \Leftarrow -retningen:
 - Anta at $\neg(B \wedge C)$ sann.
 - Da er ikke både B og C sanne, ved sannhetsbetingelsen for \wedge -formler.
 - Da er enten $\neg B$ eller $\neg C$ sann, ved sannhetsbetingelsen for \neg -formler.
 - Da er enten B^* eller C^* sann, ved induksjonshypotesen.
 - Da er $B^* \vee C^*$ sann, ved sannhetsbetingelsen for \vee -formler.
 - Da er $(B \wedge C)^*$ sann, ved definisjonen av $*$.

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning

- Vi viser så at påstanden holder hvis A er på formen $(B \vee C)$.
 - Denne gangen viser vi begge retninger samtidig via en rekke ekvivalenser.

$$\begin{aligned}(B \vee C)^* &\Leftrightarrow B^* \wedge C^* \text{ (ved definisjon av *)} \\ &\Leftrightarrow \neg B \wedge \neg C \text{ (ved IH og sannhetsbetingelsen for } \wedge\text{-formler)} \\ &\Leftrightarrow \neg(B \vee C) \text{ (ved sannhetsbetingelsene for } \vee\text{- og } \neg\text{-formler)}\end{aligned}$$

- Hvis A er på formen $\neg B$ får vi:

$$\begin{aligned}(\neg B)^* &\Leftrightarrow \neg(B^*) \text{ (ved definisjon av *)} \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg B) \text{ (ved induksjonshypotesen)}\end{aligned}$$

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Oppgave - Ekstraoppgave 3 til uke 13

La U være mengden av utsagnslogiske formler i utsagnsvariablene p , q og r , hvor vi bare bruker bindeordene \neg , \wedge og \vee .

Dette er det formelle språket som er beskrevet på forelesningene.

- a) Finn en rekursiv definisjon av funksjonen f hvor $f(A)$ er antall parenteser i A .
- b) Skriv ut argumentet for at $f(A)$ alltid er et partall som et induksjonsbevis.

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning (Ekstraoppgave 3a til uke 13)

- $f(v) = 0$, hvor v er en utsagnsvariabel
- $f(\neg B) = f(B)$
- $f((B \wedge C)) = 2 + f(B) + f(C)$
- $f((B \vee C)) = 2 + f(B) + f(C)$

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning (Ekstraoppgave 3b til uke 13)

- Vi viser ved induksjon over formler at $f(A)$ er et partall.
- Induksjonsstart er at $f(v)$, hvor v er en utsagnsvariabel, er et partall.
- Det holder fordi $f(v) = 0$.
- Induksjonsskrittet er igjen tredelt.
- Vi viser tilfellet for $A = (B \wedge C)$ og tar eventuelt resten på tavla.
- Hvis $A = (B \wedge C)$, får vi $f(A) = f((B \wedge C)) = 2 + f(B) + f(C)$.
- Ved induksjonshypotesen er $f(B)$ og $f(C)$ partall.
- Da må $f(A)$ også være et partall.

Oppgave - Ekstraoppgave 4 til uke 13

Vi kan definere mengden av korrekte uttrykk med to sett $(,)$ og $[,]$ av parenteser ved følgende kortform

- $P ::= e | (P) | [P] | PP$

- Formuler denne definisjonen som en induktiv definisjon uten bruk av denne spesielle notasjonen, dvs. bruk formuleringen "den minste mengden slik at".
- Formuler, etter beste evne, et kriterium for når et ord med symbolene $(,)$, $[$ og $]$ er korrekt, slik at kriteriet kan brukes som grunnlag for en algoritme som tester dette.
- Finn en pseudokode for en algoritme som tester om et ord er et korrekt parentesuttrykk i denne betydningen.

Hint: Du trenger en hjelpevariabel som skal "huske" hva som mangler for at en del av ordet skal bli korrekt. Du vil sannsynligvis måtte la denne variabelen ta ord i et egnet alfabet som verdier.

Løsninger på ekstraoppgavene til uke 13

Løsning (Ekstraoppgave 4a til uke 13)

La X være den minste mengden slik at følgende holder:

- $e \in X$
- $P \in X \Rightarrow (P) \in X$
- $P \in X \Rightarrow [P] \in X$
- $P \in X$ og $Q \in X \Rightarrow PQ \in X$

Løsning (Ekstraoppgave 4b til uke 13)

- X består av ord slik at parentesene er *balanserte*.
- Et kriterium for når et ord P er korrekt er følgende:
 - Anta at vi leser P fra venstre mot høyre.
 - Samtidig som vi leser ordet lager vi et nytt ord Q som består av kun venstreparenteser.
 - Hver gang vi treffer en venstreparentes legger vi denne til Q .
 - Da blir Q til enten $Q($ eller $Q[$.
 - Hver gang vi treffer en høyreparentes sjekker vi følgende.
 - Hvis Q er tom, så er ikke P korrekt. Avslutt.
 - Hvis høyreparentesen er av samme type som den siste venstreparentesen i Q , så fjern denne venstreparentesen fra Q og fortsett.
 - Hvis den ikke er samme type, så er ikke P korrekt. Avslutt.
 - Hvis vi klarer å lese alle parentesene på denne måten, og Q er tom til slutt, så er P korrekt.
 - Hvis Q ikke er tom, så er ikke P godkjent.

Repetisjon av rekurrenslikninger

- Vi repeterer raskt alle definisjonene og teoremene fra forelesningene om rekurrenslikninger.
- Vi diskuterer eventuelle vanskeligheter og regner på tavla hvis det trengs.
- Deretter løser vi noen av oppgavene fra boka.

Oppgave 7.23

Løs følgende rekurrenslikninger

(b) $t(n) - 2t(n-1) - 8t(n-2) = 0$, $t(1) = 1$, $t(2) = 0$

- Vi løser denne, og tar eventuelt flere på tavla.

Løsning (b)

- Den karakteristiske likningen til likningen er $x^2 - 2x - 8 = 0$.
- Vi kan skrive $(x + 2)(x - 4) = 0$.
- $x = -2$ og $x = 4$ er løsninger av denne likningen.
- Den generelle løsningen til rekurrenslikningen er $t(n) = A \cdot (-2)^n + B \cdot 4^n$
- $t(1) = 1$ gir $-2A + 4B = 1$
- $t(2) = 0$ gir $4A + 16B = 0$
- Fra $-2A + 4B = 1$ får vi $4A = 8B - 2$, og dermed $8B - 2 + 16B = 0$, som gir $24B = 2$ og $B = \frac{1}{12}$
- Ved å sette inn $B = \frac{1}{12}$ i $-2A + 4B = 1$ får vi $-2A + \frac{1}{3} = 1$ og $A = -\frac{1}{3}$.
- Løsningen er derfor $t(n) = -\frac{1}{3} \cdot (-2)^n + \frac{1}{12} \cdot 4^n$.