Obligatorisk oppgave 2

MAT1030 – Diskret Matematikk – Våren 2009

Innleveringsfrist: 28. april 2009

1 Mengdelære og bevisføring

Gi et bevis for følgende mengdeteoretiske påstand ved å bruke fullstendige og naturlige setninger, samt definisjonene av union, delmengde og mengdedifferens. (Det vil si, ikke bruk hverken Venn-diagrammer eller mengdeteoretiske identiteter.)

$$((A \cup B) - C) \subseteq (A \cup (B - C))$$

2 Relasjoner

Vi definerer en relasjon $\sim$ på $\mathbb{N}^2$ ved

$$(n, m) \sim (k, l) \Leftrightarrow n + l = m + k.$$

a) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

Vi definerer funksjonen

$$\oplus : \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$$

ved

$$(n, m) \oplus (k, l) = (n + k, m + l).$$

b) Vis at hvis $(n, m) \sim (n_1, m_1)$ og $(k, l) \sim (k_1, l_1)$, så vil

$$(n, m) \oplus (k, l) \sim (n_1, m_1) \oplus (k_1, l_1).$$

c) Vi skriver $E(n, m)$ for ekvivalensklassen til (n, m).
Vi definerer *addisjon* av ekvivalensklasser ved

$$E(n, m) + E(k, l) = E((n, m) \oplus (k, l)).$$

(Vi bruker egentlig resultatet i (b) for å vise at denne definisjonen gir mening, men det trenger du ikke å argumentere for.)
Finn en funksjon f slik at følgende holder.

1. Definisjonsområdet til f er $\mathbb{J}$.
2. Verdiområdet til f er mengden av ekvivalensklassene til $\sim$.
3. f er injektiv.
4. f er surjektiv.
5. $f(a + b) = f(a) + f(b)$ for alle a og b i $\mathbb{J}$.

Det vi har gjort her er å gjennomføre den mengdeteoretiske konstruksjonen av de hele tallene fra de naturlige tallene.

3 Rekursjon

Vi definerer f ved rekursjon over $n \in \mathbb{N}$ ved

$$f(1) = 1$$
$$f(n) = f(n-1) + 3(n-1)n + 1 \text{ når } n > 1$$

a) Regn ut $f(2)$, $f(3)$ og $f(4)$.

b) Finn en formel for $f(n)$ og vis denne ved induksjon over $\mathbb{N}$.

4 Induksjon

Vi definerer en mengde X av ord over alfabetet $\{a, b, c\}$ som den minste mengden som tilfredsstiller

1. $e \in X$.
2. Hvis $v \in X$ er $avb \in X$ og $bvc \in X$.
3. Hvis $u \in X$ og $v \in X$ vil $uv \in X$.

a) Finn ut hvilke av følgende tre ord som er med i X. Alle svarene skal begrunnes:

   i) $aabbcb$

   ii) $abbaac$

   iii) $babc$

b) Bruk induksjon til å vise at når $v \in X$ vil antall b'er i v være lik summen av antall a'er i v og antall c'er i v.