

Øvingsoppgaver (uke 16)

MAT1030 – Diskret Matematikk – Våren 2009

Ekstraoppgaver i tilknytning til stoffet om generell rekursjon og induksjon.

Oppgave 1

La w være et ord hvor bare bokstavene a , b og c forekommer. La $f(w)$ være summen av antall forekomster av a og b i w minus to ganger antall forekomster av c .

- Vis hvordan vi kan definere f ved rekursjon på oppbyggingen av w .
- Finn en pseudokode for en algoritme som beregner f .

Oppgave 2

La A være et utsagn på svak normalform, hvor vi antar at vi bare bruker utsagnsvariablene p , q og r . Vi lar A^* være formelen vi får ved å erstatte alle forekomster av p , q og r med $\neg p$, $\neg q$ og $\neg r$, alle forekomster av \wedge med \vee og alle forekomster av \vee med \wedge .

- Vis hvordan vi kan definere A^* ved rekursjon på oppbyggingen av A (husk at vi har et tilfelle $A = \neg B$ også).
- Vis ved induksjon at $A^* \Leftrightarrow \neg A$.

Oppgave 3

La U være mengden av utsagnslogiske formler i utsagnsvariablene p , q og r , hvor vi bare bruker bindeordene \neg , \wedge og \vee . Dette er det formelle språket som er beskrevet på forelesningene.

- Finn en rekursiv definisjon av funksjonen f hvor $f(A)$ er antall parenteser i A .
- Skriv ut argumentet for at $f(A)$ alltid er et partall som et induksjonsbevis.

Oppgave 4

Vi kan definere mengden av korrekte uttrykk med to sett $(,)$ og $[,]$ av parenteser ved følgende kortform

- Korrekt uttrykk P
 - $P ::= e|(P)||[P]PP$
- Formuler denne definisjonen som en induktiv definisjon uten bruk av denne spesielle notasjonen, dvs. bruk formuleringen “den minste mengden slik at”.
 - Formuler, etter beste evne, et kriterium for når et ord med symbolene $(,)$, $[$ og $]$ er korrekt, slik at kriteriet kan brukes som grunnlag for en algoritme som tester dette.
 - Finn en pseudokode for en algoritme som tester om et ord er et korrekt parentesuttrykk i denne betydningen.

Hint: Du trenger en hjelpevariabel som skal “huske” hva som mangler for at en del av ordet skal bli korrekt. Du vil sannsynligvis måtte la denne variabelen ta ord i et egnet alfabet som verdier.