

MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 11: Relasjoner

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

25. februar 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-03 11:37)



Kapittel 5: Relasjoner

Binære relasjoner

Binære relasjoner

Definisjon

Binære relasjoner

Definisjon

La A være en mengde.

Binære relasjoner

Definisjon

La A være en mengde.

En **binær relasjon** på A er en delmengde R av $A^2 = A \times A$.

Binære relasjoner

Definisjon

La A være en mengde.

En **binær relasjon** på A er en delmengde R av $A^2 = A \times A$.

Merk

Binære relasjoner

Definisjon

La A være en mengde.

En **binær relasjon** på A er en delmengde R av $A^2 = A \times A$.

Merk

- I senere studier kan dere komme borti relasjoner mellom tre eller flere objekter.

Binære relasjoner

Definisjon

La A være en mengde.

En **binær relasjon** på A er en delmengde R av $A^2 = A \times A$.

Merk

- I senere studier kan dere komme borti relasjoner mellom tre eller flere objekter.
Disse er da ikke binære.

Binære relasjoner

Definisjon

La A være en mengde.

En **binær relasjon** på A er en delmengde R av $A^2 = A \times A$.

Merk

- I senere studier kan dere komme borti relasjoner mellom tre eller flere objekter.
Disse er da ikke binære.
- Siden vi bare skal studere binære relasjoner, gjør vi som boken, og dropper ordet “binær”.

Binære relasjoner

Binære relasjoner

Eksempel

Binære relasjoner

Eksempel

- I kryptografi er **moduloregning** viktig.

Binære relasjoner

Eksempel

- I kryptografi er **moduloregning** viktig.
- Hvis p er et primtall og a og b er hele tall, sier vi at $a \equiv_p b$ om p er en faktor i $a - b$.

Binære relasjoner

Eksempel

- I kryptografi er **moduloregning** viktig.
- Hvis p er et primtall og a og b er hele tall, sier vi at $a \equiv_p b$ om p er en faktor i $a - b$.
- Da er \equiv_p en relasjon på de hele tallene.

Binære relasjoner

Eksempel

- I kryptografi er **moduloregning** viktig.
- Hvis p er et primtall og a og b er hele tall, sier vi at $a \equiv_p b$ om p er en faktor i $a - b$.
- Da er \equiv_p en relasjon på de hele tallene.
- Vi kunne like gjerne skrevet

$$(a, b) \in \equiv_p .$$

Binære relasjoner

Eksempel

- I kryptografi er **moduloregning** viktig.
- Hvis p er et primtall og a og b er hele tall, sier vi at $a \equiv_p b$ om p er en faktor i $a - b$.
- Da er \equiv_p en relasjon på de hele tallene.
- Vi kunne like gjerne skrevet

$$(a, b) \in \equiv_p .$$

- Relasjonen \equiv_p og beslektede relasjoner (hvor eksempelvis p ikke er et primtall, men i praksis umulig å faktorisere) spiller en stor rolle i kryptografi.

Binære relasjoner

Binære relasjoner

Eksempel

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1

2

3

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2

3

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3 ↻

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3 ↻

- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er også en binær relasjon på S .

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3 ↻

- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er også en binær relasjon på S .

1

2

3

Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

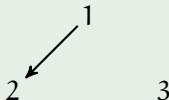
- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3 ↻

- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er også en binær relasjon på S .



Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

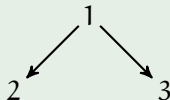
- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3 ↻

- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er også en binær relasjon på S .



Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

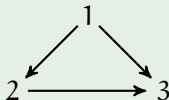
- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3 ↻

- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er også en binær relasjon på S .



Binære relasjoner

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

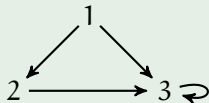
- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3 ↻

- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er også en binær relasjon på S .



Binære relasjoner

Binære relasjoner

Eksempel (Flere eksempler på relasjoner)

Binære relasjoner

Eksempel (Flere eksempler på relasjoner)

- *Likhetsrelasjonen* på en mengde S , $\{\langle x, x \rangle \mid x \in S\}$.

Binære relasjoner

Eksempel (Flere eksempler på relasjoner)

- *Likhetsrelasjonen* på en mengde S , $\{\langle x, x \rangle \mid x \in S\}$.
- *Mindre enn-relasjonen* på f.eks. naturlige tall, $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ og } x \leq y\}$

Binære relasjoner

Eksempel (Flere eksempler på relasjoner)

- *Likhetsrelasjonen* på en mengde S , $\{\langle x, x \rangle \mid x \in S\}$.
- *Mindre enn-relasjonen* på f.eks. naturlige tall, $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ og } x \leq y\}$
- *Foreldrerelasjonen* på f.eks. mengden av mennesker, $\{\langle a, b \rangle \mid a \text{ er forelder til } b\}$

Binære relasjoner

Eksempel (Flere eksempler på relasjoner)

- *Likhetsrelasjonen* på en mengde S , $\{\langle x, x \rangle \mid x \in S\}$.
- *Mindre enn-relasjonen* på f.eks. naturlige tall, $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ og } x \leq y\}$
- *Foreldrerelasjonen* på f.eks. mengden av mennesker, $\{\langle a, b \rangle \mid a \text{ er forelder til } b\}$
- *Delmengde-relasjonen* på en mengde av mengder.

Binære relasjoner

Eksempel (Flere eksempler på relasjoner)

- *Likhetsrelasjonen* på en mengde S , $\{\langle x, x \rangle \mid x \in S\}$.
- *Mindre enn-relasjonen* på f.eks. naturlige tall, $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ og } x \leq y\}$
- *Foreldrerelasjonen* på f.eks. mengden av mennesker, $\{\langle a, b \rangle \mid a \text{ er forelder til } b\}$
- *Delmengde-relasjonen* på en mengde av mengder.
- Og så videre.

Binære relasjoner

Binære relasjoner

- Noen lærebøker vil definere en relasjon fra A til B som en mengde

$$R \subseteq A \times B.$$

Binære relasjoner

- Noen lærebøker vil definere en relasjon fra A til B som en mengde

$$R \subseteq A \times B.$$

- Det kan fins pedagogiske grunner for å gjøre det slik, men

Binære relasjoner

- Noen lærebøker vil definere en relasjon fra A til B som en mengde

$$R \subseteq A \times B.$$

- Det kan fins pedagogiske grunner for å gjøre det slik, men enhver relasjon fra A til B vil samtidig være en relasjon på $A \cup B$.

Notasjon for relasjoner

Notasjon for relasjoner

- Det å beskrive en relasjon som en mengde av ordnede par gir ikke mye innsikt i hvordan relasjonen ser ut.

Notasjon for relasjoner

- Det å beskrive en relasjon som en mengde av ordnede par gir ikke mye innsikt i hvordan relasjonen ser ut.
- Det å skrive $(a, b) \in R$ representerer også en uvant måte å skrive ting på.

Notasjon for relasjoner

- Det å beskrive en relasjon som en mengde av ordnede par gir ikke mye innsikt i hvordan relasjonen ser ut.
- Det å skrive $(a, b) \in R$ representerer også en uvant måte å skrive ting på.
- Ingen av oss har lyst til å begynne å skrive $(2, 3) \in <$ i stedet for $2 < 3$

Notasjon for relasjoner

- Det å beskrive en relasjon som en mengde av ordnede par gir ikke mye innsikt i hvordan relasjonen ser ut.
- Det å skrive $(a, b) \in R$ representerer også en uvant måte å skrive ting på.
- Ingen av oss har lyst til å begynne å skrive $(2, 3) \in <$ i stedet for $2 < 3$
eller $(3, 3) \in =$ i stedet for $3 = 3$,

Notasjon for relasjoner

- Det å beskrive en relasjon som en mengde av ordnede par gir ikke mye innsikt i hvordan relasjonen ser ut.
- Det å skrive $(a, b) \in R$ representerer også en uvant måte å skrive ting på.
- Ingen av oss har lyst til å begynne å skrive $(2, 3) \in <$ i stedet for $2 < 3$
eller $(3, 3) \in =$ i stedet for $3 = 3$,
for ikke å snakke om $(\emptyset, \{\emptyset\}) \in \in$ i stedet for $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

Notasjon for relasjoner

- Det å beskrive en relasjon som en mengde av ordnede par gir ikke mye innsikt i hvordan relasjonen ser ut.
- Det å skrive $(a, b) \in R$ representerer også en uvant måte å skrive ting på.
- Ingen av oss har lyst til å begynne å skrive $(2, 3) \in <$ i stedet for $2 < 3$

eller $(3, 3) \in =$ i stedet for $3 = 3$,

for ikke å snakke om $(\emptyset, \{\emptyset\}) \in \in$ i stedet for $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

(Skulle vi finne på noe slikt, ville vi rote oss bort i grunnlagsproblemer som langt overstiger det vi skal ta opp i MAT1030, samt gjøre noe helt unyttig.)

Notasjon for relasjoner

- Det å beskrive en relasjon som en mengde av ordnede par gir ikke mye innsikt i hvordan relasjonen ser ut.
- Det å skrive $(a, b) \in R$ representerer også en uvant måte å skrive ting på.
- Ingen av oss har lyst til å begynne å skrive $(2, 3) \in <$ i stedet for $2 < 3$
eller $(3, 3) \in =$ i stedet for $3 = 3$,
for ikke å snakke om $(\emptyset, \{\emptyset\}) \in \in$ i stedet for $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
(Skulle vi finne på noe slikt, ville vi rote oss bort i grunnlagsproblemer som langt overstiger det vi skal ta opp i MAT1030, samt gjøre noe helt unyttig.)
- Den første forenklingen vi skal gjøre er å skrive aRb når vi mener $(a, b) \in R$.

Beskrivelser av relasjoner

Beskrivelser av relasjoner

- Hvis A er en liten mengde, fins det to måter å beskrive R på,

Beskrivelser av relasjoner

- Hvis A er en liten mengde, fins det to måter å beskrive R på,
 - Ved hjelp av en **matrise**

Beskrivelser av relasjoner

- Hvis A er en liten mengde, fins det to måter å beskrive R på,
 - Ved hjelp av en **matrise**
 - Ved hjelp av en **graf**

Beskrivelser av relasjoner

- Hvis A er en liten mengde, fins det to måter å beskrive R på,
 - Ved hjelp av en **matrise**
 - Ved hjelp av en **graf**
- Vi skal se på noen eksempler.

Beskrivelser av relasjoner

- Hvis A er en liten mengde, fins det to måter å beskrive R på,
 - Ved hjelp av en **matrise**
 - Ved hjelp av en **graf**
- Vi skal se på noen eksempler.
- For begge måter å beskrive relasjoner på spiller det en stor rolle hvordan man organiserer elementene i mengden A ,

Beskrivelser av relasjoner

- Hvis A er en liten mengde, fins det to måter å beskrive R på,
 - Ved hjelp av en **matrise**
 - Ved hjelp av en **graf**
- Vi skal se på noen eksempler.
- For begge måter å beskrive relasjoner på spiller det en stor rolle hvordan man organiserer elementene i mengden A ,
 - i rekkefølge som koordinater

Beskrivelser av relasjoner

- Hvis A er en liten mengde, fins det to måter å beskrive R på,
 - Ved hjelp av en **matrise**
 - Ved hjelp av en **graf**
- Vi skal se på noen eksempler.
- For begge måter å beskrive relasjoner på spiller det en stor rolle hvordan man organiserer elementene i mengden A ,
 - i rekkefølge som koordinater
 - som punkter på en tavle eller et ark

Beskrivelser av relasjoner

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.
 - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke 1 og 0.

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.
 - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke 1 og 0.



Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.
 - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke 1 og 0.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.
 - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke 1 og 0.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.
 - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke 1 og 0.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.
 - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke 1 og 0.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.
 - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke 1 og 0.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere R ved hjelp av en 5×5 -matrise.
 - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
 - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
 - Vi markerer elementene i R med **T** og de andre med **F**.
 - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke 1 og 0.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Den grafiske fremstillingen tar vi på tavlen.

Beskrivelser av relasjoner

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- Matriseformen blir

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- Matriseformen blir

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- Matriseformen blir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- Matriseformen blir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- Matriseformen blir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- Matriseformen blir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Beskrivelser av relasjoner

- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- Matriseformen blir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Den grafiske fremstillingen tar vi på tavlen.

Flere begreper

Flere begreper

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.

Flere begreper

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.

Flere begreper

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye **symboler** som vi gir en spesiell betydning.

Flere begreper

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye **symboler** som vi gir en spesiell betydning.
- Et eksempel fra forrige uke er relasjonen $a \equiv_p b$ som uttrykker at p er en faktor i $a - b$.

Flere begreper

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye **symboler** som vi gir en spesiell betydning.
- Et eksempel fra forrige uke er relasjonen $a \equiv_p b$ som uttrykker at p er en faktor i $a - b$.
- En av de ferdighetene vi skal oppøve i MAT1030 er evnen til å lese, og forstå, definisjoner.

Flere begreper

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye **symboler** som vi gir en spesiell betydning.
- Et eksempel fra forrige uke er relasjonen $a \equiv_p b$ som uttrykker at p er en faktor i $a - b$.
- En av de ferdighetene vi skal oppøve i MAT1030 er evnen til å lese, og forstå, definisjoner.
- De relasjonene vi vil innføre i eksemplene, vil som oftest ikke være pensum, men evnen til å forstå slike eksempler kan bli prøvet til eksamen.

Flere begreper

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i et løp etter oppnådd sluttid.

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i et løp etter oppnådd sluttid.
 - Ordne LOTTO-tallene etter størrelse.

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i et løp etter oppnådd sluttid.
 - Ordne LOTTO-tallene etter størrelse.
 - Ordne studenter etter oppnådde karakterer.

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i et løp etter oppnådd sluttid.
 - Ordne LOTTO-tallene etter størrelse.
 - Ordne studenter etter oppnådde karakterer.
- Det er noe felles ved oppgaven å skulle ordne en mengde, og det er naturlig å isolere de relasjonene som kan oppfattes som ordninger.

Flere begreper

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i et løp etter oppnådd sluttid.
 - Ordne LOTTO-tallene etter størrelse.
 - Ordne studenter etter oppnådde karakterer.
- Det er noe felles ved oppgaven å skulle ordne en mengde, og det er naturlig å isolere de relasjonene som kan oppfattes som ordninger.
 - Det er blant annet noe av det vi skal lære nå.

Flere begreper

Flere begreper

- Inklusjon mellom mengder er en form for “større enn”, men det fins mengder, eksempelvis $\{1, 2, 3\}$ og $\{2, 3, 4\}$, som ikke er inneholdt i hverandre noen vei.

Flere begreper

- Inklusjon mellom mengder er en form for “større enn”, men det fins mengder, eksempelvis $\{1, 2, 3\}$ og $\{2, 3, 4\}$, som ikke er inneholdt i hverandre noen vei.
- Hva vil sorteringsalgoritmer gjøre hvis vi bruker dem på slike ordninger?

Flere begreper

- Inklusjon mellom mengder er en form for “større enn”, men det fins mengder, eksempelvis $\{1, 2, 3\}$ og $\{2, 3, 4\}$, som ikke er inneholdt i hverandre noen vei.
- Hva vil sorteringsalgoritmer gjøre hvis vi bruker dem på slike ordninger?
- Det er noen egenskaper ved relasjoner som er så vanlig forekommende (hos de *nyttige* relasjonene) at vi har gitt dem egne navn.

Flere begreper

- Inklusjon mellom mengder er en form for “større enn”, men det fins mengder, eksempelvis $\{1, 2, 3\}$ og $\{2, 3, 4\}$, som ikke er inneholdt i hverandre noen vei.
- Hva vil sorteringsalgoritmer gjøre hvis vi bruker dem på slike ordninger?
- Det er noen egenskaper ved relasjoner som er så vanlig forekommende (hos de *nyttige* relasjonene) at vi har gitt dem egne navn.
- Vi gir listen først og drøfter hver enkelt egenskap etterpå:

Egenskaper ved binære relasjoner

Egenskaper ved binære relasjoner

Definisjon

Egenskaper ved binære relasjoner

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:

Egenskaper ved binære relasjoner

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.

Egenskaper ved binære relasjoner

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis det ikke fins noen $x \in A$ slik at xRx .

Egenskaper ved binære relasjoner

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis det ikke fins noen $x \in A$ slik at xRx .
 - **Symmetrisk** hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.

Egenskaper ved binære relasjoner

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis det ikke fins noen $x \in A$ slik at xRx .
 - **Symmetrisk** hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
 - **Antisymmetrisk** hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.

Egenskaper ved binære relasjoner

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis det ikke fins noen $x \in A$ slik at xRx .
 - **Symmetrisk** hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
 - **Antisymmetrisk** hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
 - **Transitiv** hvis $xRy \wedge yRz$ medfører xRz for alle $x, y, z \in A$.

Egenskaper ved binære relasjoner

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis det ikke fins noen $x \in A$ slik at xRx .
 - **Symmetrisk** hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
 - **Antisymmetrisk** hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
 - **Transitiv** hvis $xRy \wedge yRz$ medfører xRz for alle $x, y, z \in A$.
- Vi skal bruke den tiden vi trenger til å lære oss disse begrepene og å forstå dem.

Refleksive relasjoner

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.
- Hvis A er mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , og ϕ og ψ er sammensatte utsagn, kan vi definere $\phi R \psi$ som

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.
- Hvis A er mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , og ϕ og ψ er sammensatte utsagn, kan vi definere $\phi R \psi$ som $\phi \rightarrow \psi$ er en tautologi.

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.
- Hvis A er mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , og ϕ og ψ er sammensatte utsagn, kan vi definere $\phi R \psi$ som
$$\phi \rightarrow \psi \text{ er en tautologi.}$$

Da er R en refleksiv relasjon.

Refleksive relasjoner

Refleksive relasjoner

- Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

Refleksive relasjoner

- Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Refleksive relasjoner

- Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

- Ved å se at vi har bare **T** på diagonalen, ser vi at relasjonen er refleksiv.

Refleksive relasjoner

- Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

- Ved å se at vi har bare **T** på diagonalen, ser vi at relasjonen er refleksiv.
- Gjør vi en liten forandring, trenger ikke relasjonen lenger å være refleksiv.

Refleksive relasjoner

Refleksive relasjoner

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Irrefleksive relasjoner

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.
- *Far til* og *Mor til* er irrefleksive relasjoner på enhver forsamling av mennesker.

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.
- *Far til* og *Mor til* er irrefleksive relasjoner på enhver forsamling av mennesker.
- $<$ og $>$ er irrefleksive relasjoner på \mathbb{N} , \mathbb{J} , \mathbb{Q} og \mathbb{R} .

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.
- *Far til* og *Mor til* er irrefleksive relasjoner på enhver forsamling av mennesker.
- $<$ og $>$ er irrefleksive relasjoner på \mathbb{N} , \mathbb{J} , \mathbb{Q} og \mathbb{R} .
- *Ekte inklusjon* er en irrefleksiv relasjon.

Irrefleksive relasjoner

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

$$\phi \wedge \psi \rightarrow \mathbf{F}$$

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

$$\phi \wedge \psi \rightarrow \mathbf{F}$$

er en tautologi.

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

$$\phi \wedge \psi \rightarrow \mathbf{F}$$

er en tautologi.

- Da er S hverken refleksiv eller irrefleksiv.

Irrefleksive relasjoner

Irrefleksive relasjoner

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

Irrefleksive relasjoner

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Irrefleksive relasjoner

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Det er bare å sjekke om det står **F** langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Det er bare å sjekke om det står **F** langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Det er bare å sjekke om det står **F** langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Det er bare å sjekke om det står **F** langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Det er bare å sjekke om det står **F** langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Det er bare å sjekke om det står **F** langs diagonalen.

Symmetriske relasjoner

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.
- $\phi \wedge \psi$ er en kontradiksjon.

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.
- $\phi \wedge \psi$ er en kontradiksjon.
- n og m har en felles faktor > 1 , som en relasjon på \mathbb{N} .

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.
- $\phi \wedge \psi$ er en kontradiksjon.
- n og m har en felles faktor > 1 , som en relasjon på \mathbb{N} .
- $A \cap B = \emptyset$ som relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .

- Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

- Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

Eksempel

- Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Eksempel

- Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er symmetrisk

Eksempel

- Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er symmetrisk

Eksempel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er symmetrisk

Eksempel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er **ikke** symmetrisk

Antisymmetriske relasjoner

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.
- Inklusjon av mengder.

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.
- Inklusjon av mengder.
- \leq og $<$ i vanlige sammenhenger.

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.
- Inklusjon av mengder.
- \leq og $<$ i vanlige sammenhenger.
- Antisymmetri er svært ofte knyttet til former for ordninger, og vi kommer tilbake til dette senere

Transitive relasjoner

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .
- “ ϕ er en logisk konsekvens av ψ ” er transitiv.

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .
- “ ϕ er en logisk konsekvens av ψ ” er transitiv.
- *Far til* og *Mor til* er ikke transitive, men *etterkommer* er transitiv.

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .
- “ ϕ er en logisk konsekvens av ψ ” er transitiv.
- *Far til* og *Mor til* er ikke transitive, men *etterkommer* er transitiv.
- *Søsken til* er transitiv hvis vi mener helsøsken, men ikke hvis vi inkluderer halvsøsken.

Et eksempel

Et eksempel

- Vi skal ta utgangspunkt i noen relasjoner som det kan være aktuelt å studere av praktiske eller teoretiske grunner.

Et eksempel

- Vi skal ta utgangspunkt i noen relasjoner som det kan være aktuelt å studere av praktiske eller teoretiske grunner.
- Vi skal se på hvilke av de fem egenskapene vi har sett på disse relasjonene vil ha.

Et eksempel

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)
 1. Vi har $x > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0$, men omvendingen gjelder ikke.

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)
 1. Vi har $x > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0$, men omvendingen gjelder ikke.
 2. Utsagnene $\neg(x < 0) \vee x > 0$ og $x < 0 \rightarrow x > 0$ impliserer hverandre, men de er ikke like.

Et eksempel

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)
 1. Vi har $x > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0$, men omvendingen gjelder ikke.
 2. Utsagnene $\neg(x < 0) \vee x > 0$ og $x < 0 \rightarrow x > 0$ impliserer hverandre, men de er ikke like.
- \Rightarrow er transitiv siden $A \Rightarrow C$ når $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow C$.

Enda et eksempel

Enda et eksempel

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.

Enda et eksempel

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.

Enda et eksempel

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.
- Da har vi variable x_1, \dots, x_n i programmet.

Enda et eksempel

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.
- Da har vi variable x_1, \dots, x_n i programmet.
- Underveis vil verdiene på disse variablene endre seg, gjennom instruksjoner som

$$x_i \leftarrow t(x_1, \dots, x_n).$$

Enda et eksempel

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.
- Da har vi variable x_1, \dots, x_n i programmet.
- Underveis vil verdiene på disse variablene endre seg, gjennom instruksjoner som

$$x_i \leftarrow t(x_1, \dots, x_n).$$

- En fordeling av verdier på variablene kaller vi en **valuasjon** eller en **tilstand**.

Enda et eksempel

Enda et eksempel

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .

Enda et eksempel

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .
- Hvert program \mathcal{P} vil bestemme en relasjon $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ på V , hvor

Enda et eksempel

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .
- Hvert program \mathcal{P} vil bestemme en relasjon $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ på V , hvor

$$u \llbracket \mathcal{P} \rrbracket v$$

Enda et eksempel

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .
- Hvert program \mathcal{P} vil bestemme en relasjon $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ på V , hvor

$$u \llbracket \mathcal{P} \rrbracket v$$

hvis output-valuasjonen er v når inputvaluasjonen er u .

Enda et eksempel

Enda et eksempel

- Hvis $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.

Enda et eksempel

- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.

Enda et eksempel

- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *symmetrisk*, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.

Enda et eksempel

- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er symmetrisk, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen **ENIGMA** brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.

Enda et eksempel

- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *symmetrisk*, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen **ENIGMA** brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *antisymmetrisk*, betyr det at vi aldri kommer tilbake til input-dataene ved å kjøre programmet på output-dataene.

Enda et eksempel

- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *symmetrisk*, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen **ENIGMA** brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *antisymmetrisk*, betyr det at vi aldri kommer tilbake til input-dataene ved å kjøre programmet på output-dataene.
- $[\mathcal{P}]$ er i praksis aldri *transitiv*, siden dette ville medført at vi oppnår det samme om vi kjører programmet to ganger, hvor output overføres til input mellom gangene.

Enda et eksempel

- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *symmetrisk*, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen **ENIGMA** brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.
- Hvis $[\mathcal{P}]$ er *antisymmetrisk*, betyr det at vi aldri kommer tilbake til input-dataene ved å kjøre programmet på output-dataene.
- $[\mathcal{P}]$ er i praksis aldri *transitiv*, siden dette ville medført at vi oppnår det samme om vi kjører programmet to ganger, hvor output overføres til input mellom gangene.

Dette vil imidlertid være tilfelle om output-dataene alltid inneholder en form for stopp-ordre.

Enda et eksempel

Enda et eksempel

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*

Enda et eksempel

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.

Enda et eksempel

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.

Enda et eksempel

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valuasjoner.

Enda et eksempel

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valuasjoner.
- \vdash^* er relasjonen på $P \times V$ hvor

Enda et eksempel

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valuasjoner.
- \vdash^* er relasjonen på $P \times V$ hvor

$$(p, v) \vdash^* (q, u)$$

hvis programmet \mathcal{P} , om vi er i posisjon p og med valuasjon v vil komme til posisjon q og med valuasjon u etter ingen, ett eller flere regneskritt.

Enda et eksempel

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valuasjoner.
- \vdash^* er relasjonen på $P \times V$ hvor

$$(p, v) \vdash^* (q, u)$$

hvis programmet \mathcal{P} , om vi er i posisjon p og med valuasjon v vil komme til posisjon q og med valuasjon u etter ingen, ett eller flere regneskritt.

- Denne relasjonen er selvfølgelig avhengig av \mathcal{P} , og vi kan skrive den $\vdash_{\mathcal{P}}^*$.

Enda et eksempel

Enda et eksempel

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.

Enda et eksempel

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.
Den er da normalt ikke irrefleksiv.

Enda et eksempel

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.
Den er da normalt ikke irrefleksiv.
- Denne relasjonen er *transitiv*.

Enda et eksempel

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.
Den er da normalt ikke irrefleksiv.
- Denne relasjonen er *transitiv*.
- Hvis relasjonen er symmetrisk, er det en katastrofe for programmereren, siden vi da bare har løkkeberegninger.

Enda et eksempel

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.
Den er da normalt ikke irrefleksiv.
- Denne relasjonen er *transitiv*.
- Hvis relasjonen er symmetrisk, er det en katastrofe for programmereren, siden vi da bare har løkkeberegninger.
- Hvis relasjonen er *antisymmetrisk*, vil beregningen aldri gå i løkke.

Ekvivalensrelasjoner

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

a) La $A = \{0, \dots, 9\}$.

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

a) La $A = \{0, \dots, 9\}$.

Hvis a og b er elementer i A lar vi aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

a) La $A = \{0, \dots, 9\}$.

Hvis a og b er elementer i A lar vi aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.

Vi ser at R deler A opp i tre disjunkte mengder $B = \{0, 3, 6, 9\}$, $C = \{1, 4, 7\}$ og $D = \{2, 5, 8\}$, hvor hver mengde består av tall som står i innbyrdes relasjon til hverandre, mens vi ikke har noen R -forbindelser på mengdene imellom.

Ekvivalensrelasjoner

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Eksempel (Fortsatt)

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Vi ser at to punkter står i R-relasjon til hverandre nøyaktig når avstanden til origo er den samme.

Eksempel (Fortsatt)

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Vi ser at to punkter står i R -relasjon til hverandre nøyaktig når avstanden til origo er den samme.

Denne relasjonen deler \mathbb{R}^2 opp i uendelig mange disjunkte mengder, nemlig sirklene om origo med radius r for $r \geq 0$.

Ekvivalensrelasjoner

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*.

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

- c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*. Heltallsverdien til et tall p er det største hele tallet $a \leq p$.

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

- c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*. Heltallsverdien til et tall p er det største hele tallet $a \leq p$.

I alle disse eksemplene har vi definert en relasjon R ved at to objekter står i relasjon til hverandre når de deler en viss felles egenskap.

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

- c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*. Heltallsverdien til et tall p er det største hele tallet $a \leq p$.

I alle disse eksemplene har vi definert en relasjon R ved at to objekter står i relasjon til hverandre når de deler en viss felles egenskap.

Det er denne typen relasjoner vi vil kalle *ekvivalensrelasjoner*.

Ekvivalensrelasjoner

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.
- Hvis a og b deler en egenskap, og b og c deler den samme egenskapen, er den også felles for a og c .

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.
- Hvis a og b deler en egenskap, og b og c deler den samme egenskapen, er den også felles for a og c .

Vi vil kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *transitiv*.

Ekvivalensrelasjoner

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuisjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”.

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuisjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”.

Den formelle definisjonen er:

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuisjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”.

Den formelle definisjonen er:

Definisjon

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuisjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”.

Den formelle definisjonen er:

Definisjon

La R være en relasjon på en mengde A .

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuisjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”.

Den formelle definisjonen er:

Definisjon

La R være en relasjon på en mengde A .

Vi kaller R en **ekvivalensrelasjon** om R er refleksiv, symmetrisk og transitiv.