# MAT1030 – Forelesning 11

## Relasjoner

Roger Antonsen - 25. februar 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-03 11:37)

## Kapittel 5: Relasjoner

### Binære relasjoner

**Definisjon.**

La $A$ være en mengde.

En binær relasjon på $A$ er en delmengde $R$ av $A^2 = A \times A$.

**Merk.**

- I senere studier kan dere komme borti relasjoner mellom tre eller flere objekter. Disse er da ikke binære.
- Siden vi bare skal studere binære relasjoner, gjør vi som boken, og dropper ordet "binær".

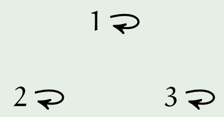
**Eksempel.**

- I kryptografi er moduloregning viktig.
- Hvis $p$ er et primtall og $a$ og $b$ er hele tall, sier vi at $a \equiv_p b$ om $p$ er en faktor i $a - b$.
- Da er $\equiv_p$ en relasjon på de hele tallene.
- Vi kunne like gjerne skrevet
$$(a, b) \in \equiv_p .$$
- Relasjonen $\equiv_p$ og beslektede relasjoner (hvor eksempelvis $p$ ikke er et primtall, men i praksis umulig å faktorisere) spiller en stor rolle i kryptografi.

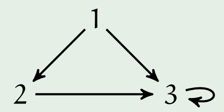
**Eksempel.**

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er en binær relasjon på $S$.



- $\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$ er også en binær relasjon på $S$.



**Eksempel (Flere eksempler på relasjoner).**
- *Likhetsrelasjonen* på en mengde $S$, $\{\langle x,x\rangle \mid x \in S\}$.
- *Mindre enn*-relasjonen på f.eks. naturlige tall, $\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbb{N}$ og $x \leqslant y\}$
- *Foreldrerelasjonen* på f.eks. mengden av mennesker, $\{\langle a,b\rangle | a$ er forelder til $b\}$
- *Delmengde*-relasjonen på en mengde av mengder.
- Og så videre.

- Noen lærebøker vil definere en relasjon fra $A$ til $B$ som en mengde

$$R \subseteq A \times B.$$

- Det kan fins pedagogiske grunner for å gjøre det slik, men enhver relasjon fra $A$ til $B$ vil samtidig være en relasjon *på* $A \cup B$.

## Notasjon for relasjoner

- Det å beskrive en relasjon som en mengde av ordnede par gir ikke mye innsikt i hvordan relasjonen ser ut.
- Det å skrive $(a,b) \in R$ representerer også en uvant måte å skrive ting på.
- Ingen av oss har lyst til å begynne å skrive $(2,3) \in <$ i stedet for $2 < 3$
  eller $(3,3) \in =$ i stedet for $3 = 3$,
  for ikke å snakke om $(\emptyset, \{\emptyset\}) \in \in$ i stedet for $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
  (Skulle vi finne på noe slikt, ville vi rote oss bort i grunnlagsproblemer som langt overstiger det vi skal ta opp i MAT1030, samt gjøre noe helt unyttig.)
- Den første forenklingen vi skal gøre er å skrive $aRb$ når vi mener $(a,b) \in R$.

## Beskrivelser av relasjoner

- Hvis $A$ er en liten mengde, fins det to måter å beskrive $R$ på,
  - Ved hjelp av en matrise
  - Ved hjelp av en graf

- Vi skal se på noen eksempler.
- For begge måter å beskrive relasjoner på spiller det en stor rolle hvordan man organiserer elementene i mengden $A$,
  - i rekkefølge som koordinater
  - som punkter på en tavle eller et ark
- La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
- Vi skal illustrere $R$ ved hjelp av en $5 \times 5$-matrise.
  - Radene, regnet ovenfra, vil representere 1. koordinat.
  - Søylene, regnet fra venstre, vil representere 2. koordinat.
  - Vi markerer elementene i $R$ med **T** og de andre med **F**.
  - Det er like vanlig, og ofte bedre, å bruke $1$ og $0$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Den grafiske fremstillingen tar vi på tavlen.
- La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- Matriseformen blir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Den grafiske fremstillingen tar vi på tavlen.

## Flere begreper

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes abstrakt og at det er mange nye begreper.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye symboler som vi gir en spesiell betydning.
- Et eksempel fra forrige uke er relasjonen $a \equiv_p b$ som uttrykker at $p$ er en faktor i $a - b$.
- En av de ferdighetene vi skal oppøve i MAT1030 er evnen til å lese, og forstå, definisjoner.
- De relasjonene vi vil innføre i eksemplene, vil som oftest ikke være pensum, men evnen til å forstå slike eksempler kan bli prøvet til eksamen.
- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
  - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
  - Ordne deltagerne i et løp etter oppnådd sluttid.

  - Ordne LOTTO-tallene etter størrelse.
  - Ordne studenter etter oppnådde karakterer.
- Det er noe felles ved oppgaven å skulle ordne en mengde, og det er naturlig å isolere de relasjonene som kan oppfattes som ordninger.
  - Det er blant annet noe av det vi skal lære nå.
- Inklusjon mellom mengder er en form for "større enn", men det fins mengder, eksempelvis $\{1,2,3\}$ og $\{2,3,4\}$, som ikke er inneholdt i hverandre noen vei.
- Hva vil sorteringsalgoritmer gjøre hvis vi bruker dem på slike ordninger?
- Det er noen egenskaper ved relasjoner som er så vanlig forekommende (hos de *nyttige* relasjonene) at vi har gitt dem egne navn.
- Vi gir listen først og drøfter hver enkelt egenskap etterpå:

## Egenskaper ved binære relasjoner

**Definisjon.**
- En relasjon $R$ på en mengde $A$ kalles:
  - Refleksiv hvis $xRx$ for alle $x \in A$.
  - Irrefleksiv hvis det ikke fins noen $x \in A$ slik at $xRx$.
  - Symmetrisk hvis $xRy$ medfører $yRx$ for alle $x, y \in A$.
  - Antisymmetrisk hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
  - Transitiv hvis $xRy \wedge yRz$ medfører $xRz$ for alle $x, y, z \in A$.
- Vi skal bruke den tiden vi trenger til å lære oss disse begrepene og å forstå dem.

## Refleksive relasjoner

**Eksempel (Refleksiv: $xRx$ for alle $x$).**
- For enhver mengde $A$ vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på $A$.
- Hvis $X$ er mengden av delmengder av en mengde $\mathcal{E}$, vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på $X$.
- $\leqslant$ er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på $\mathbb{N}$, på $\mathbb{Q}$, på $\mathbb{J}$ eller på $\mathbb{R}$.
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for $\mathbb{N}$ etc.
- Hvis $A$ er mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene $p$, $q$ og $r$, og $\phi$ og $\psi$ er sammensatte utsagn, kan vi definere $\phi R \psi$ som
  $$\phi \to \psi \text{ er en tautologi.}$$
  Da er $R$ en refleksiv relasjon.

- Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

- Ved å se at vi har bare **T** på diagonalen, ser vi at relasjonen er refleksiv.
- Gjør vi en liten forandring, trenger ikke relasjonen lenger å være refleksiv.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

### Irrefleksive relasjoner

**Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle $x$).**

- $\neq$ er irrefleksiv på alle mengder.
- *Far til* og *Mor til* er irrefleksive relasjoner på enhver forsamling av mennesker.
- $<$ og $>$ er irrefleksive relasjoner på $\mathbb{N}$, $\mathbb{J}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$.
- *Ekte inklusjon* er en irrefleksiv relasjon.

**Eksempel.**

- La $X$ være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene $p$, $q$ og $r$, la $\phi$ og $\psi$ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen $S$ ved

  $$\phi S \psi$$

  når

  $$\phi \wedge \psi \rightarrow \mathbf{F}$$

  er en tautologi.
- Da er $S$ hverken refleksiv eller irrefleksiv.

- Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

- Det er bare å sjekke om det står **F** langs diagonalen.

### Symmetriske relasjoner

**Eksempel (Symmetrisk: $xRy$ medfører $yRx$ for alle $x$ og $y$.).**
- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- $x$ er gift med $y$.
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.
- $\phi \wedge \psi$ er en kontradiksjon.
- $n$ og $m$ har en felles faktor $> 1$, som en relasjon på $\mathbb{N}$.
- $A \cap B = \emptyset$ som relasjon på potensmengden til $\mathcal{E}$.

- Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

**Eksempel.**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er symmetrisk

**Eksempel.**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er *ikke* symmetrisk

### Antisymmetriske relasjoner

**Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$).**
- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.
- Inklusjon av mengder.
- $\leqslant$ og $<$ i vanlige sammenhenger.
- Antisymmetri er svært ofte knyttet til former for ordninger, og vi kommer tilbake til dette senere

### Transitive relasjoner

**Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører $xRz$).**

- $<$ og $\leqslant$ er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- $\subseteq$ er en transitiv relasjon på potensmengden til $\mathcal{E}$.
- "$\phi$ er en logisk konsekvens av $\psi$" er transitiv.
- *Far til* og *Mor til* er ikke transitive, men *etterkommer* er transitiv.
- *Søsken til* er transitiv hvis vi mener helsøsken, men ikke hvis vi inkluderer halvsøsken.

### Et eksempel

- Vi skal ta utgangspunkt i noen relasjoner som det kan være aktuelt å studere av praktiske eller teoretiske grunner.
- Vi skal se på hvilke av de fem egenskapene vi har sett på disse relasjonene vil ha.
- Hvis $A$ og $B$ er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at $B$ er en logisk konsekvens av $A$. Vi sier at $A$ impliserer $B$.
- Det betyr at $B$ er sann i enhver situasjon som gjør $A$ sann.
- Vi oppfatter $\Rightarrow$ som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- $\Rightarrow$ er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn $A$.
- $\Rightarrow$ er da ikke *irrefleksiv*.
- $\Rightarrow$ er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)
  1. Vi har $x > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0$, men omvendingen gjelder ikke.
  2. Utsagnene $\neg(x < 0) \vee x > 0$ og $x < 0 \rightarrow x > 0$ impliserer hverandre, men de er ikke like.
- $\Rightarrow$ er transitiv siden $A \Rightarrow C$ når $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow C$.

### Enda et eksempel

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program $P$ "gjør", er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.
- Da har vi variable $x_1, \ldots, x_n$ i programmet.
- Underveis vil verdiene på disse variablene endre seg, gjennom instruksjoner som

$$x_i \leftarrow t(x_1, \ldots, x_n).$$

- En fordeling av verdier på variablene kaller vi en valuasjon eller en tilstand.
- La $V$ være mengden av valuasjoner, og la $u$ og $v$ være elementer i $V$.
- Hvert program $\mathcal{P}$ vil bestemme en relasjon $[\![\mathcal{P}]\!]$ på $V$, hvor

$$u[\![\mathcal{P}]\!]v$$

hvis output-valuasjonen er $v$ når inputvaluasjonen er $u$.

- Hvis $[\![\mathcal{P}]\!]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[\![\mathcal{P}]\!]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[\![\mathcal{P}]\!]$ er symmetrisk, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen ENIGMA brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.
- Hvis $[\![\mathcal{P}]\!]$ er antisymmetrisk, betyr det at vi aldri kommer tilbake til input-dataene ved å kjøre programmet på output-dataene.
- $[\![\mathcal{P}]\!]$ er i praksis aldri transitiv, siden dette ville medført at vi oppnår det samme om vi kjører programmet to ganger, hvor output overføres til input mellom gangene.

  Dette vil imidlertid være tilfelle om output-dataene alltid inneholder en form for stopp-ordre.
- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer "gjør" er $\vdash^*$
- Et program $P$ er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en bestemt posisjon i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La $P$ være mengden av posisjoner og la fortsatt $V$ være mengden av valuasjoner.
- $\vdash^*$ er relasjonen på $P \times V$ hvor

  $$(p, v) \vdash^* (q, u)$$

  hvis programmet $\mathcal{P}$, om vi er i posisjon $p$ og med valuasjon $v$ vil komme til posisjon $q$ og med valuasjon $u$ etter ingen, ett eller flere regneskritt.
- Denne relasjonen er selvfølgelig avhengig av $\mathcal{P}$, og vi kan skrive den $\vdash^*_{\mathcal{P}}$.
- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.

  Den er da normalt ikke irrefleksiv.
- Denne relasjonen er *transitiv*.
- Hvis relasjonen er symmetrisk, er det en katastrofe for programmereren, siden vi da bare har løkkeberegninger.
- Hvis relasjonen er *antisymmetrisk*, vil beregningen aldri gå i løkke.

## Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er ekvivalensrelasjonene. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

**Eksempel.**

a) La $A = \{0, \ldots, 9\}$.

   Hvis $a$ og $b$ er elementer i $A$ lar vi $aRb$ hvis $a - b$ er delelig med 3.

   Vi ser at $R$ deler $A$ opp i tre disjunkte mengder $B = \{0, 3, 6, 9\}$, $C = \{1, 4, 7\}$ og $D = \{2, 5, 8\}$, hvor hver mengde består av tall som står i innbyrdes relasjon til hverandre, mens vi ikke har noen $R$-forbindelser på mengdene imellom.

**Eksempel (Fortsatt).**

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Vi ser at to punkter står i $R$-relasjon til hverandre nøyaktig når avstanden til origo er den samme.

Denne relasjonen deler $\mathbb{R}^2$ opp i uendelig mange disjunkte mengder, nemlig sirklene om origo med radius $r$ for $r \geqslant 0$.

**Eksempel (Fortsatt).**

c) La $A = \mathbb{Q}$ og la $pRq$ om $p$ og $q$ har den samme *heltallsverdien*.

Heltallsverdien til et tall $p$ er det største hele tallet $a \leqslant p$.

I alle disse eksemplene har vi definert en relasjon $R$ ved at to objekter står i relasjon til hverandre når de deler en viss felles egenskap.

Det er denne typen relasjoner vi vil kalle *ekvivalensrelasjoner*.

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

  Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.
- Hvis $a$ og $b$ deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at $b$ og $a$ deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.
- Hvis $a$ og $b$ deler en egenskap, og $b$ og $c$ deler den samme egenskapen, er den også felles for $a$ og $c$.

  Vi vil kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *transitiv*.
- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuisjonen vår om å formalisere det uformelle "dele visse egenskaper".

  Den formelle definisjonen er:

**Definisjon.**

La $R$ være en relasjon på en mengde $A$.

Vi kaller $R$ en ekvivalensrelasjon om $R$ er refleksiv, symmetrisk og transitiv.