MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 12: Relasjoner og litt funksjoner

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

3. mars 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-04 01:00)

Før vi begynner

Litt om obligen og studentengasjementet

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.
- Dere har et utrolig godt tilbud, men hvorfor benytter dere dere ikke av det?

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.
- Dere har et utrolig godt tilbud, men hvorfor benytter dere dere ikke av det?
    1. Gå på gruppetimene!

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.
- Dere har et utrolig godt tilbud, men hvorfor benytter dere dere ikke av det?
  1. Gå på gruppetimene!
  2. Gå på plenumsregningene!

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.
- Dere har et utrolig godt tilbud, men hvorfor benytter dere dere ikke av det?
    1. Gå på gruppetimene!
    2. Gå på plenumsregningene!
    3. Regn oppgaver!

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.
- Dere har et utrolig godt tilbud, men hvorfor benytter dere dere ikke av det?
    1. Gå på gruppetimene!
    2. Gå på plenumsregningene!
    3. Regn oppgaver!
    4. Spør gruppelærer og elektronisk orakel!

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.
- Dere har et utrolig godt tilbud, men hvorfor benytter dere dere ikke av det?
    1. Gå på gruppetimene!
    2. Gå på plenumsregningene!
    3. Regn oppgaver!
    4. Spør gruppelærer og elektronisk orakel!
    5. Vær engasjerte!

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.
- Dere har et utrolig godt tilbud, men hvorfor benytter dere dere ikke av det?
  1. Gå på gruppetimene!
  2. Gå på plenumsregningene!
  3. Regn oppgaver!
  4. Spør gruppelærer og elektronisk orakel!
  5. Vær engasjerte!
- Mathias kommer innom i morgen og snakker litt om obligene.

Kapittel 5: Relasjoner og funksjoner

Repetisjon

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
  - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
  - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.
  - Irrefleksiv hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx.

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
    - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.
    - Irrefleksiv hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx.
    - Symmetrisk hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
  - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.
  - Irrefleksiv hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx.
  - Symmetrisk hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
  - Antisymmetrisk hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
  - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.
  - Irrefleksiv hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx.
  - Symmetrisk hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
  - Antisymmetrisk hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
  - Transitiv hvis $xRy \wedge yRz$ medfører xRz for alle $x, y, z \in A$.

Repetisjon

Repetisjon

- Etter å ha sett på endel eksempler på relasjoner, og deres tilknytning til egenskaper som *refleksiv*, *irrefleksiv*, *symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv*, begynte vi å se på ekvivalensrelasjoner.

Repetisjon

- Etter å ha sett på endel eksempler på relasjoner, og deres tilknytning til egenskaper som *refleksiv*, *irrefleksiv*, *symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv*, begynte vi å se på ekvivalensrelasjoner.
- En *ekvivalensrelasjon* er normalt en relasjon som uttrykker at objektene har visse felles egenskaper.

Repetisjon

- Etter å ha sett på endel eksempler på relasjoner, og deres tilknytning til egenskaper som *refleksiv*, *irrefleksiv*, *symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv*, begynte vi å se på ekvivalensrelasjoner.
- En *ekvivalensrelasjon* er normalt en relasjon som uttrykker at objektene har visse felles egenskaper.
- Vi gikk gjennom tre eksempler på ekvivalensrelasjoner:

Repetisjon

- Etter å ha sett på endel eksempler på relasjoner, og deres tilknytning til egenskaper som *refleksiv*, *irrefleksiv*, *symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv*, begynte vi å se på ekvivalensrelasjoner.
- En *ekvivalensrelasjon* er normalt en relasjon som uttrykker at objektene har visse felles egenskaper.
- Vi gikk gjennom tre eksempler på ekvivalensrelasjoner:
  a) $A = \{0, \ldots, 9\}$ og aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.

Repetisjon

- Etter å ha sett på endel eksempler på relasjoner, og deres tilknytning til egenskaper som *refleksiv*, *irrefleksiv*, *symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv*, begynte vi å se på ekvivalensrelasjoner.
- En *ekvivalensrelasjon* er normalt en relasjon som uttrykker at objektene har visse felles egenskaper.
- Vi gikk gjennom tre eksempler på ekvivalensrelasjoner:
  a) $A = \{0, \ldots, 9\}$ og aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.
  b) $A = \mathbb{R}^2$ og $(x, y)R(u, v)$ hvis $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.

Repetisjon

- Etter å ha sett på endel eksempler på relasjoner, og deres tilknytning til egenskaper som *refleksiv*, *irrefleksiv*, *symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv*, begynte vi å se på ekvivalensrelasjoner.
- En *ekvivalensrelasjon* er normalt en relasjon som uttrykker at objektene har visse felles egenskaper.
- Vi gikk gjennom tre eksempler på ekvivalensrelasjoner:
  a) $A = \{0, \ldots, 9\}$ og aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.
  b) $A = \mathbb{R}^2$ og $(x, y)R(u, v)$ hvis $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.
  c) $A = \mathbb{Q}$ og pRq hvis p og q har den samme *heltallsverdien*.

Repetisjon

- Etter å ha sett på endel eksempler på relasjoner, og deres tilknytning til egenskaper som *refleksiv*, *irrefleksiv*, *symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv*, begynte vi å se på ekvivalensrelasjoner.
- En *ekvivalensrelasjon* er normalt en relasjon som uttrykker at objektene har visse felles egenskaper.
- Vi gikk gjennom tre eksempler på ekvivalensrelasjoner:
  a) $A = \{0, \ldots, 9\}$ og aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.
  b) $A = \mathbb{R}^2$ og $(x, y)R(u, v)$ hvis $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.
  c) $A = \mathbb{Q}$ og pRq hvis p og q har den samme *heltallsverdien*.
- En relasjon er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

- En viktig egenskap ved en ekvivalensrelasjon R på en mengde A er at R deler A opp i disjunkte mengder av parvis ekvivalente elementer i A.

Ekvivalensklasser

- En viktig egenskap ved en ekvivalensrelasjon R på en mengde A er at R deler A opp i disjunkte mengder av parvis ekvivalente elementer i A.

  (Disjunkt betyr at snittet er tomt.)

Ekvivalensklasser

- En viktig egenskap ved en ekvivalensrelasjon R på en mengde A er at R deler A opp i disjunkte mengder av parvis ekvivalente elementer i A.

  (Disjunkt betyr at snittet er tomt.)
- Disse mengdene kaller vi ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

- En viktig egenskap ved en ekvivalensrelasjon R på en mengde A er at R deler A opp i disjunkte mengder av parvis ekvivalente elementer i A.

  (Disjunkt betyr at snittet er tomt.)
- Disse mengdene kaller vi ekvivalensklasser
- Vi skal vise denne egenskaper ved ekvivalensrelasjoner helt generelt, men la oss se på noen eksempler først.

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

Eksempel

Ekvivalensklasser

Eksempel

- La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Ekvivalensklasser

Eksempel

- La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- La $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4),$

Ekvivalensklasser

Eksempel

- La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- La $R = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2), (3,3), (3,4),$
  $(3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

Ekvivalensklasser

Eksempel

- La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- La $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4),$
  $(3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$
- I utgangspunktet er det ikke så lett å se hvilke egenskaper R har, men beskriver vi R på matriseform blir bildet klarere:

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

Eksempel (Fortsatt)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Ekvivalensklasser

Eksempel (Fortsatt)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Vi ser at aRb hvis og bare hvis a og b tilhører den samme av delmengdene $\{0, 1\}$, $\{2\}$ og $\{3, 4, 5\}$.

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

Eksempel

Ekvivalensklasser

Eksempel

- Vi definerer relasjonen R på $\mathbb{R}^2$ ved $(x, y)R(u, v)$ om $x + y = u + v$.

Ekvivalensklasser

Eksempel

- Vi definerer relasjonen R på $\mathbb{R}^2$ ved $(x, y)R(u, v)$ om $x + y = u + v$.
- R er en ekvivalensrelasjon.

Ekvivalensklasser

Eksempel

- Vi definerer relasjonen R på $\mathbb{R}^2$ ved $(x, y)R(u, v)$ om $x + y = u + v$.
- R er en ekvivalensrelasjon.
- Hvis $x + y = k$ vil $(x, y)R(u, v)$ om $u + v = k$.

Ekvivalensklasser

Eksempel

- Vi definerer relasjonen R på $\mathbb{R}^2$ ved $(x, y)R(u, v)$ om $x + y = u + v$.
- R er en ekvivalensrelasjon.
- Hvis $x + y = k$ vil $(x, y)R(u, v)$ om $u + v = k$.
- Denne relasjonen deler planet opp i uendelig mange disjunkte deler, hvor delene er alle linjene med stigningstall -1

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

Definisjon

Ekvivalensklasser

Definisjon

La R være en ekvivalensrelasjon på en mengde A og la $a \in A$.

Ekvivalensklasser

Definisjon

La R være en ekvivalensrelasjon på en mengde A og la $a \in A$.

Vi lar ekvivalensklassen til a være

$$E(a) = \{b \in A \mid aRb\}.$$

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

Teorem

Ekvivalensklasser

Teorem

La R være en ekvivalensrelasjon på mengden A, $E(a)$ ekvivalensklassen til $a \in A$.

Ekvivalensklasser

Teorem

La R være en ekvivalensrelasjon på mengden A, $E(a)$ ekvivalensklassen til $a \in A$.

a) For alle $a \in A$ vil $a \in E(a)$.

Ekvivalensklasser

Teorem

La R være en ekvivalensrelasjon på mengden A, $E(a)$ ekvivalensklassen til $a \in A$.

a) For alle $a \in A$ vil $a \in E(a)$.
b) Hvis aRb vil $E(a) = E(b)$.

Ekvivalensklasser

Teorem

La R være en ekvivalensrelasjon på mengden A, $E(a)$ ekvivalensklassen til $a \in A$.

a) For alle $a \in A$ vil $a \in E(a)$.
b) Hvis aRb vil $E(a) = E(b)$.
c) Hvis $\neg(aRb)$ vil $E(a) \cap E(b) = \emptyset$

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

La aRb. Skal vise at $E(a) = E(b)$.

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

La aRb. Skal vise at $E(a) = E(b)$.

Siden vi da også har at bRa er det nok å vise at $E(b) \subseteq E(a)$ for å vise b).

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

La aRb. Skal vise at $E(a) = E(b)$.

Siden vi da også har at bRa er det nok å vise at $E(b) \subseteq E(a)$ for å vise b).

Så la $c \in E(b)$.

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

La aRb. Skal vise at $E(a) = E(b)$.

Siden vi da også har at bRa er det nok å vise at $E(b) \subseteq E(a)$ for å vise b).

Så la $c \in E(b)$.

Da vil $aRb \wedge bRc$ så aRc fordi R er transitiv.

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

La aRb. Skal vise at $E(a) = E(b)$.

Siden vi da også har at bRa er det nok å vise at $E(b) \subseteq E(a)$ for å vise b).

Så la $c \in E(b)$.

Da vil $aRb \wedge bRc$ så aRc fordi R er transitiv.

Det betyr at $c \in E(a)$.

Ekvivalensklasser

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

La aRb. Skal vise at $E(a) = E(b)$.

Siden vi da også har at bRa er det nok å vise at $E(b) \subseteq E(a)$ for å vise b).

Så la $c \in E(b)$.

Da vil $aRb \wedge bRc$ så aRc fordi R er transitiv.

Det betyr at $c \in E(a)$.

Siden $c \in E(b)$ var valgt vilkårlig, kan vi slutte at $E(b) \subseteq E(a)$.

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

Bevis (Fortsatt)

Ekvivalensklasser

Bevis (Fortsatt)

Til sist, anta at $c \in E(a) \cap E(b)$.

Ekvivalensklasser

Bevis (Fortsatt)

Til sist, anta at $c \in E(a) \cap E(b)$.

Da vil $aRc \land bRc$.

Ekvivalensklasser

Bevis (Fortsatt)

Til sist, anta at $c \in E(a) \cap E(b)$.

Da vil $aRc \wedge bRc$.

Ved symmetri og transitivitet for R følger det at aRb.

Ekvivalensklasser

Bevis (Fortsatt)

Til sist, anta at $c \in E(a) \cap E(b)$.

Da vil $aRc \wedge bRc$.

Ved symmetri og transitivitet for R følger det at aRb.

Snur vi dette argumentet på hodet, får vi at $\neg(aRb) \Rightarrow E(a) \cap E(b) = \emptyset$.

Ekvivalensklasser

Bevis (Fortsatt)

Til sist, anta at $c \in E(a) \cap E(b)$.

Da vil $aRc \wedge bRc$.

Ved symmetri og transitivitet for R følger det at aRb.

Snur vi dette argumentet på hodet, får vi at
$\neg(aRb) \Rightarrow E(a) \cap E(b) = \emptyset$.

Dette viser c), og teoremet er bevist.

Ekvivalensklasser

Ekvivalensklasser

Oppgave

Ekvivalensklasser

Oppgave

La A være en mengde og la R og S være ekvivalensrelasjoner på A.

Ekvivalensklasser

Oppgave

La A være en mengde og la R og S være ekvivalensrelasjoner på A.

La $T = S \cap R$

Ekvivalensklasser

Oppgave

La A være en mengde og la R og S være ekvivalensrelasjoner på A.

La $T = S \cap R$

a) Forklar hvorfor vi har at aTb hvis og bare hvis $aRb \wedge aSb$ for alle a og b i A.

Ekvivalensklasser

Oppgave

La A være en mengde og la R og S være ekvivalensrelasjoner på A.

La $T = S \cap R$

a) Forklar hvorfor vi har at aTb hvis og bare hvis $aRb \wedge aSb$ for alle a og b i A.

b) Vis at T er en ekvivalensrelasjon.

Ekvivalensklasser

Oppgave

La A være en mengde og la R og S være ekvivalensrelasjoner på A.

La $T = S \cap R$

a) Forklar hvorfor vi har at aTb hvis og bare hvis $aRb \wedge aSb$ for alle a og b i A.

b) Vis at T er en ekvivalensrelasjon.

c) Finn et eksempel hvor $R \cup S$ ikke er en ekvivalensrelasjon.

Ordninger

Ordninger

- En annen type relasjoner som forekommer ofte er ordninger.

Ordninger

- En annen type relasjoner som forekommer ofte er ordninger.
- Vi har en ordning når vi formaliserer “mindre eller lik” , “er svakere enn” og tilsvarende forhold.

Ordninger

- En annen type relasjoner som forekommer ofte er ordninger.
- Vi har en ordning når vi formaliserer “mindre eller lik” , “er svakere enn” og tilsvarende forhold.
- Vi tar definisjonen først, og illustrerer den med noen eksempler etterpå.

Ordninger

- En annen type relasjoner som forekommer ofte er ordninger.
- Vi har en ordning når vi formaliserer “mindre eller lik” , “er svakere enn” og tilsvarende forhold.
- Vi tar definisjonen først, og illustrerer den med noen eksempler etterpå.
- Vi følger boka og definerer:

Ordninger

Ordninger

Definisjon

Ordninger

Definisjon

La A være en mengde med en relasjon R.

Ordninger

Definisjon

La A være en mengde med en relasjon R.
Vi kaller R en partiell ordning hvis

Ordninger

Definisjon

La A være en mengde med en relasjon R.

Vi kaller R en partiell ordning hvis

1. R er refleksiv

Ordninger

Definisjon

La A være en mengde med en relasjon R.

Vi kaller R en partiell ordning hvis

1. R er refleksiv
2. R er transitiv

Ordninger

Definisjon

La A være en mengde med en relasjon R.

Vi kaller R en partiell ordning hvis

1. R er refleksiv
2. R er transitiv
3. R er antisymmetrisk.

Ordninger

Ordninger

Eksempel

Ordninger

Eksempel

a) La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og $\subseteq$ være inklusjonsordningen på potensmengden til $\mathcal{E}$.

Ordninger

Eksempel

a) La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og $\subseteq$ være inklusjonsordningen på potensmengden til $\mathcal{E}$.

1. $\subseteq$ er *refleksiv* fordi $A \subseteq A$ for alle mengder A.

Ordninger

Eksempel

a) La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og $\subseteq$ være inklusjonsordningen på potensmengden til $\mathcal{E}$.

1. $\subseteq$ er *refleksiv* fordi $A \subseteq A$ for alle mengder A.
2. $\subseteq$ er *transitiv* fordi $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ alltid vil medføre at $A \subseteq C$

Ordninger

Eksempel

a) La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og $\subseteq$ være inklusjonsordningen på potensmengden til $\mathcal{E}$.

1. $\subseteq$ er *refleksiv* fordi $A \subseteq A$ for alle mengder A.
2. $\subseteq$ er *transitiv* fordi $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ alltid vil medføre at $A \subseteq C$
3. $\subseteq$ er *antisymmetrisk* fordi $A = B$ når $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Ordninger

Eksempel

a) La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og $\subseteq$ være inklusjonsordningen på potensmengden til $\mathcal{E}$.

1. $\subseteq$ er *refleksiv* fordi $A \subseteq A$ for alle mengder A.
2. $\subseteq$ er *transitiv* fordi $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ alltid vil medføre at $A \subseteq C$
3. $\subseteq$ er *antisymmetrisk* fordi $A = B$ når $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Dette viser at $\subseteq$ er en partiell ordning.

Ordninger

Ordninger

Eksempel (Fortsatt)

Ordninger

Eksempel (Fortsatt)

b) La $\leqslant$ være den vanlige “mindre-eller-lik” relasjonen på $\mathbb{J}$.

Ordninger

Eksempel (Fortsatt)

b) La $\leqslant$ være den vanlige "mindre-eller-lik" relasjonen på $\mathbb{J}$.

$\leqslant$ er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så $\leqslant$ er en partiell ordning.

Ordninger

Eksempel (Fortsatt)

b) La $\leqslant$ være den vanlige "mindre-eller-lik" relasjonen på $\mathbb{J}$.

$\leqslant$ er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så $\leqslant$ er en partiell ordning.

$<$ er derimot IKKE en partiell ordning, fordi $<$ ikke er *refleksiv*.

Ordninger

Eksempel (Fortsatt)

b) La $\leqslant$ være den vanlige "mindre-eller-lik" relasjonen på $\mathbb{J}$.

$\leqslant$ er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så $\leqslant$ er en partiell ordning.

$<$ er derimot IKKE en partiell ordning, fordi $<$ ikke er *refleksiv*.

c) Hvis vi ordner studentene i MAT1030 etter oppnådd karakter, med A øverst, F langt nede, men "ikke møtt" og "trukket seg før eksamen" enda lenger nede, har vi ikke en partiell ordning.

Ordninger

Eksempel (Fortsatt)

b) La $\leqslant$ være den vanlige "mindre-eller-lik" relasjonen på $\mathbb{J}$.

$\leqslant$ er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så $\leqslant$ er en partiell ordning.

$<$ er derimot IKKE en partiell ordning, fordi $<$ ikke er *refleksiv*.

c) Hvis vi ordner studentene i MAT1030 etter oppnådd karakter, med A øverst, F langt nede, men "ikke møtt" og "trukket seg før eksamen" enda lenger nede, har vi ikke en partiell ordning.

Siden det er mer enn 8 studenter, må minst to stykker lide samme MAT1030-skjebne.

Ordninger

Eksempel (Fortsatt)

b) La $\leqslant$ være den vanlige "mindre-eller-lik" relasjonen på $\mathbb{J}$.

$\leqslant$ er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så $\leqslant$ er en partiell ordning.

$<$ er derimot IKKE en partiell ordning, fordi $<$ ikke er *refleksiv*.

c) Hvis vi ordner studentene i MAT1030 etter oppnådd karakter, med A øverst, F langt nede, men "ikke møtt" og "trukket seg før eksamen" enda lenger nede, har vi ikke en partiell ordning.

Siden det er mer enn 8 studenter, må minst to stykker lide samme MAT1030-skjebne.

Disse vil stå likt, men være forskjellige personer.

Ordninger

Eksempel (Fortsatt)

b) La $\leqslant$ være den vanlige "mindre-eller-lik" relasjonen på $\mathbb{J}$.

$\leqslant$ er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så $\leqslant$ er en partiell ordning.

$<$ er derimot IKKE en partiell ordning, fordi $<$ ikke er *refleksiv*.

c) Hvis vi ordner studentene i MAT1030 etter oppnådd karakter, med A øverst, F langt nede, men "ikke møtt" og "trukket seg før eksamen" enda lenger nede, har vi ikke en partiell ordning.

Siden det er mer enn 8 studenter, må minst to stykker lide samme MAT1030-skjebne.

Disse vil stå likt, men være forskjellige personer.

Det betyr at denne relasjonen ikke er *antisymmetrisk*

Ordninger

Ordninger

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.

Ordninger

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.
- Hvis vi har to tall a og b vil en av tre holde:

Ordninger

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.
- Hvis vi har to tall a og b vil en av tre holde:
  1. $a = b$

Ordninger

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.
- Hvis vi har to tall a og b vil en av tre holde:
    1. $a = b$
    2. $a < b$

Ordninger

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.
- Hvis vi har to tall a og b vil en av tre holde:
  1. $a = b$
  2. $a < b$
  3. $b < a$

Ordninger

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.
- Hvis vi har to tall a og b vil en av tre holde:
  1. $a = b$
  2. $a < b$
  3. $b < a$
- For inklusjon har vi en fjerde mulighet, nemlig at ingen av A eller B er inneholdt i den andre.

Ordninger

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.
- Hvis vi har to tall a og b vil en av tre holde:
  1. $a = b$
  2. $a < b$
  3. $b < a$
- For inklusjon har vi en fjerde mulighet, nemlig at ingen av A eller B er inneholdt i den andre.
- Vi fanger opp denne forskjellen i en definisjon:

Ordninger

Ordninger

Definisjon

Ordninger

Definisjon

La R være en partiell ordning på en mengde A.

Ordninger

Definisjon

La R være en partiell ordning på en mengde A.

R kalles total dersom vi for alle a og b i A har at

Ordninger

Definisjon

La R være en partiell ordning på en mengde A.

R kalles total dersom vi for alle a og b i A har at

$$aRb \vee bRa.$$

Ordninger

Definisjon

La R være en partiell ordning på en mengde A.

R kalles total dersom vi for alle a og b i A har at

$$aRb \lor bRa.$$

Merk

Ordninger

Definisjon

La R være en partiell ordning på en mengde A.

R kalles total dersom vi for alle a og b i A har at

$$aRb \lor bRa.$$

Merk

- Det er for totale ordninger at vi har gode sorteringsalgoritmer.

Ordninger

Definisjon

La R være en partiell ordning på en mengde A.

R kalles total dersom vi for alle a og b i A har at

$$aRb \vee bRa.$$

Merk

- Det er for totale ordninger at vi har gode sorteringsalgoritmer.
- Utviklingen av slike algoritmer overlater vi til foreleserne i programmering, de er flinkere til å finne effektive algoritmer.

En utfordring

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

Oppgave

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

Oppgave

La R være en relasjon på en mengde A.

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

Oppgave

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en preordning hvis R er transitiv og refleksiv.

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

Oppgave

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en preordning hvis R er transitiv og refleksiv.

Definer relasjonen S på A ved aSb når $aRb \land bRa$.

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

Oppgave

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en preordning hvis R er transitiv og refleksiv.

Definer relasjonen S på A ved aSb når $aRb \wedge bRa$.

a) Vis at S er en ekvivalensrelasjon på A.

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

Oppgave

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en preordning hvis R er transitiv og refleksiv.

Definer relasjonen S på A ved aSb når $aRb \wedge bRa$.

a) Vis at S er en ekvivalensrelasjon på A.

Der er vanlig å skrive A/S for mengden av ekvivalensklasser $E(a)$ til ekvivalensrelasjonen S.

En utfordring

En utfordring

Oppgave (Fortsatt)

En utfordring

Oppgave (Fortsatt)

Vi definerer en relasjon $\hat{R}$ på A/S ved

$$E(a)\hat{R}E(b)$$

om aRb

En utfordring

Oppgave (Fortsatt)

Vi definerer en relasjon $\hat{R}$ på A/S ved

$$E(a)\hat{R}E(b)$$

om aRb

b) Vis at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene $E(a)$ og $E(b)$ vi bruker.

En utfordring

Oppgave (Fortsatt)

Vi definerer en relasjon $\hat{R}$ på A/S ved

$$E(a)\hat{R}E(b)$$

om aRb

b) Vis at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene $E(a)$ og $E(b)$ vi bruker.

c) Vis at $\hat{R}$ er en partiell ordning på mengden av ekvivalensklasser.

Kapittel 6: Funksjoner

Funksjoner

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som
  - Heltallsverdien til $\frac{n}{m}$

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som
  - Heltallsverdien til $\frac{n}{m}$
  - Primtall nr. n.

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som
  - Heltallsverdien til $\frac{n}{m}$
  - Primtall nr. n.
  - Største felles divisor av n og m.

Funksjoner

Funksjoner

Felles for alle disse eksemplene er at det er en sammenheng mellom

argumentet eller argumentene

Funksjoner

Felles for alle disse eksemplene er at det er en sammenheng mellom

argumentet eller argumentene

til funksjonen, og

verdien

Funksjoner

Felles for alle disse eksemplene er at det er en sammenheng mellom

argumentet eller argumentene

til funksjonen, og

verdien

til funksjonen.

Funksjoner

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.

Vi skal holde oss til presisjonsnivået i boka.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.

Vi skal holde oss til presisjonsnivået i boka.

Hovedpoenget er at vi skal tolke ordet *regel* på neste side så liberalt som mulig.

Funksjoner

Funksjoner

Definisjon

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \rightarrow Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk

- Som sagt skal ordet *regel* tolkes så liberalt som mulig, men, som vi skal se, med en smule forsiktighet.

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk

- Som sagt skal ordet *regel* tolkes så liberalt som mulig, men, som vi skal se, med en smule forsiktighet.
- Det er ikke noe krav om at det skal foreligge noen regler som mennesker eller maskiner kan følge.

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk

- Som sagt skal ordet *regel* tolkes så liberalt som mulig, men, som vi skal se, med en smule forsiktighet.
- Det er ikke noe krav om at det skal foreligge noen regler som mennesker eller maskiner kan følge.
- Det eneste kravet er at $f(x)$ skal fins i Y, og at uttrykket $f(x)$ ikke kan være flertydig.