MAT1030 – Forelesning 12

Relasjoner og litt funksjoner

Roger Antonsen - 3. mars 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-04 01:00)

Før vi begynner

Litt om obligen og studentengasjementet

- Besvarelsene på obligen er mottatt, men de er ikke gode.
- Oppmøtet på gruppetimene er lavt.
- Oppmøtet på plenumsregningene er lavt.
- Dette er et kurs som krever mye **trening** og **øvelse**.
- Dere har et utrolig godt tilbud, men hvorfor benytter dere dere ikke av det?
  1. Gå på gruppetimene!
  2. Gå på plenumsregningene!
  3. Regn oppgaver!
  4. Spør gruppelærer og elektronisk orakel!
  5. Vær engasjerte!
- Mathias kommer innom i morgen og snakker litt om obligene.

Kapittel 5: Relasjoner og funksjoner

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon.
- En relasjon R på en mengde A kalles:
  - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.
  - Irrefleksiv hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx.
  - Symmetrisk hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
  - Antisymmetrisk hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
  - Transitiv hvis $xRy \wedge yRz$ medfører xRz for alle $x, y, z \in A$.

- Etter å ha sett på endel eksempler på relasjoner, og deres tilknytning til egenskaper som *refleksiv*, *irrefleksiv*, *symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv*, begynte vi å se på ekvivalensrelasjoner.

- En *ekvivalensrelasjon* er normalt en relasjon som uttrykker at objektene har visse felles egenskaper.
- Vi gikk gjennom tre eksempler på ekvivalensrelasjoner:
  a) $A = \{0, \ldots, 9\}$ og aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.
  b) $A = \mathbb{R}^2$ og $(x, y)R(u, v)$ hvis $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.
  c) $A = \mathbb{Q}$ og pRq hvis p og q har den samme *heltallsverdien*.
- En relasjon er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

- En viktig egenskap ved en ekvivalensrelasjon R på en mengde A er at R deler A opp i disjunkte mengder av parvis ekvivalente elementer i A.

  (Disjunkt betyr at snittet er tomt.)
- Disse mengdene kaller vi ekvivalensklasser
- Vi skal vise denne egenskaper ved ekvivalensrelasjoner helt generelt, men la oss se på noen eksempler først.

Eksempel.
- La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- La $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4),$
  $(3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$
- I utgangspunktet er det ikke så lett å se hvilke egenskaper R har, men beskriver vi R på matriseform blir bildet klarere:

Eksempel (Fortsatt).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Vi ser at aRb hvis og bare hvis a og b tilhører den samme av delmengdene $\{0, 1\}$, $\{2\}$ og $\{3, 4, 5\}$.

Eksempel.
- Vi definerer relasjonen R på $\mathbb{R}^2$ ved $(x, y)R(u, v)$ om $x + y = u + v$.
- R er en ekvivalensrelasjon.

- Hvis $x + y = k$ vil $(x, y)R(u, v)$ om $u + v = k$.
- Denne relasjonen deler planet opp i uendelig mange disjunkte deler, hvor delene er alle linjene med stigningstall -1

Definisjon.

La R være en ekvivalensrelasjon på en mengde A og la $a \in A$.

Vi lar ekvivalensklassen til a være

$$E(a) = \{b \in A \mid aRb\}.$$

Teorem.

La R være en ekvivalensrelasjon på mengden A, $E(a)$ ekvivalensklassen til $a \in A$.

a) For alle $a \in A$ vil $a \in E(a)$.

b) Hvis aRb vil $E(a) = E(b)$.

c) Hvis $\neg(aRb)$ vil $E(a) \cap E(b) = \emptyset$

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så kan vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis.

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

La aRb. Skal vise at $E(a) = E(b)$.

Siden vi da også har at bRa er det nok å vise at $E(b) \subseteq E(a)$ for å vise b).

Så la $c \in E(b)$.

Da vil $aRb \wedge bRc$ så aRc fordi R er transitiv.

Det betyr at $c \in E(a)$.

Siden $c \in E(b)$ var valgt vilkårlig, kan vi slutte at $E(b) \subseteq E(a)$.

Bevis (Fortsatt).

Til sist, anta at $c \in E(a) \cap E(b)$.

Da vil $aRc \wedge bRc$.

Ved symmetri og transitivitet for R følger det at aRb.

Snur vi dette argumentet på hodet, får vi at $\neg(aRb) \Rightarrow E(a) \cap E(b) = \emptyset$.

Dette viser c), og teoremet er bevist.

Oppgave.

La A være en mengde og la R og S være ekvivalensrelasjoner på A.

La $T = S \cap R$

a) Forklar hvorfor vi har at aTb hvis og bare hvis $aRb \wedge aSb$ for alle a og b i A.
b) Vis at T er en ekvivalensrelasjon.
c) Finn et eksempel hvor $R \cup S$ ikke er en ekvivalensrelasjon.

Ordninger

- En annen type relasjoner som forekommer ofte er ordninger.
- Vi har en ordning når vi formaliserer "mindre eller lik" , "er svakere enn" og tilsvarende forhold.
- Vi tar definisjonen først, og illustrerer den med noen eksempler etterpå.
- Vi følger boka og definerer:

Definisjon.

La A være en mengde med en relasjon R.

Vi kaller R en partiell ordning hvis

1. R er refleksiv
2. R er transitiv
3. R er antisymmetrisk.

Eksempel.

a) La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og $\subseteq$ være inklusjonsordningen på potensmengden til $\mathcal{E}$.
   1. $\subseteq$ er *refleksiv* fordi $A \subseteq A$ for alle mengder A.
   2. $\subseteq$ er *transitiv* fordi $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ alltid vil medføre at $A \subseteq C$
   3. $\subseteq$ er *antisymmetrisk* fordi $A = B$ når $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

   Dette viser at $\subseteq$ er en partiell ordning.

Eksempel (Fortsatt).

b) La $\leqslant$ være den vanlige "mindre-eller-lik" relasjonen på $\mathbb{J}$.

$\leqslant$ er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så $\leqslant$ er en partiell ordning.

$<$ er derimot *IKKE* en partiell ordning, fordi $<$ ikke er *refleksiv*.

c) Hvis vi ordner studentene i MAT1030 etter oppnådd karakter, med A øverst, F langt nede, men "ikke møtt" og "trukket seg før eksamen" enda lenger nede, har vi ikke en partiell ordning.

Siden det er mer enn 8 studenter, må minst to stykker lide samme MAT1030-skjebne.

Disse vil stå likt, men være forskjellige personer.

Det betyr at denne relasjonen ikke er *antisymmetrisk*

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.
- Hvis vi har to tall a og b vil en av tre holde:
  1. $a = b$
  2. $a < b$
  3. $b < a$
- For inklusjon har vi en fjerde mulighet, nemlig at ingen av A eller B er inneholdt i den andre.
- Vi fanger opp denne forskjellen i en definisjon:

Definisjon.

La R være en partiell ordning på en mengde A.

R kalles total dersom vi for alle a og b i A har at

$$aRb \lor bRa.$$

Merk.

- Det er for totale ordninger at vi har gode sorteringsalgoritmer.
- Utviklingen av slike algoritmer overlater vi til foreleserne i programmering, de er flinkere til å finne effektive algoritmer.

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.

- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

Oppgave.

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en preordning hvis R er transitiv og refleksiv.

Definer relasjonen S på A ved aSb når $aRb \land bRa$.

a) Vis at S er en ekvivalensrelasjon på A.

Der er vanlig å skrive A/S for mengden av ekvivalensklasser $E(a)$ til ekvivalensrelasjonen S.

Oppgave (Fortsatt).

Vi definerer en relasjon $\hat{R}$ på A/S ved

$$E(a)\hat{R}E(b)$$

om aRb

b) Vis at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene $E(a)$ og $E(b)$ vi bruker.

c) Vis at $\hat{R}$ er en partiell ordning på mengden av ekvivalensklasser.

Kapittel 6: Funksjoner

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som
  - Heltallsverdien til $\frac{n}{m}$
  - Primtall nr. n.
  - Største felles divisor av n og m.

Felles for alle disse eksemplene er at det er en sammenheng mellom

argumentet eller argumentene

til funksjonen, og

verdien

til funksjonen.

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.
Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.
Vi skal holde oss til presisjonsnivået i boka.
Hovedpoenget er at vi skal tolke ordet *regel* på neste side så liberalt som mulig.

Definisjon.
La X og Y være to mengder.
En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk.

- Som sagt skal ordet *regel* tolkes så liberalt som mulig, men, som vi skal se, med en smule forsiktighet.
- Det er ikke noe krav om at det skal foreligge noen regler som mennesker eller maskiner kan følge.
- Det eneste kravet er at $f(x)$ skal fins i Y, og at uttrykket $f(x)$ ikke kan være flertydig.