# MAT1030 – Diskret Matematikk

## Forelesning 13: Funksjoner

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

4. mars 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-06 18:57)

# Kapittel 6: Funksjoner

# Opphenting

- Forrige forelesning snakket vi veldig grundig om relasjoner
- Vi snakket om ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.
- Vi definerte partielle ordninger og totale ordninger.
- Deretter begynte vi å snakke litt om funksjoner.
- Det skal vi fortsette med nå.

# Eksempler

## Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.
- La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og la $A$ være en delmengde av $\mathcal{E}$
- Vi definerte $\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} \ : \ x \notin A\}$.
- Hver $A$ har en og bare en komplement-mengde, så $f(A) = \overline{A}$ er en funksjon.
- Her er $X$ lik $Y$ lik potensmengden til $\mathcal{E}$.
- På samme måte kan vi oppfatte $\cap$ og $\cup$ som funksjoner.
- Hvis $Y$ er potensmengden til $\mathcal{E}$ og $X = Y^2$, vil $\cap$ og $\cup$ være funksjoner fra $X$ til $Y$.

# Eksempler

## Eksempel

- Quicksort er en algoritme som sorterer elementene i en liste etter størrelse.
- Quicksort gir mening hver gang listen er hentet fra en totalt ordnet mengde.
- Da beregner Quicksort funksjonen som tar en vilkårlig liste som argument og gir den sorterte listen som verdi.
- Vi kan finne en annen algoritme Slowsort for sortering av elementene i en liste, og den vil definere den samme funksjonen, men være en annen algoritme.
- Det er forbindelsen mellom argument og verdi som bestemmer hvilken funksjon vi har, ikke hvordan vi kommer fra argument til verdi.

# Definisjonsområdet og verdiområdet

## Definisjon

a) Hvis $f : X \to Y$ er en funksjon kaller vi
- $X$ for definisjonsområdet til $f$.
- $Y$ for verdiområdet til $f$.

b) Bildet eller bildemengden til $f$ er

$$\{f(x) \ : \ x \in X\}$$

c) Vi kan skrive $f[X]$ for bildet til $f$.

# Definisjonsområdet og verdiområdet

## Eksempel

- Definer $f(x) = e^x$ som en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

  Da vil:

  - *Definisjonsområdet* til $f$ være hele $\mathbb{R}$.
  - *Verdiområdet* til $f$ være hele $\mathbb{R}$.
  - *Bildet* til $f$ være mengden av positive reelle tall.

# Definisjonsområdet og verdiområdet

## Eksempel

- La $A \subseteq \mathcal{E}$ være en mengde, og definer

$$f_A(B) = A \cap B$$

  som en funksjon fra potensmengden $X$ til $\mathcal{E}$ til seg selv.
- Da er $X$ både definisjonsområdet og verdiområdet til $f_A$, mens bildemengden vil være potensmengden til $A$.

# Definisjonsområdet og verdiområdet

## Eksempel

- Innledningsvis i disse forelesningene konstruerte vi en pseudokode for å beregne $|n - m|$ fra $n$ og $m$.
- I dette tilfellet var definisjonsområdet mengden av par av ikke-negative hele tall, verdiområdet og bildemengden lik mengden av ikke-negative hele tall.
- Da vi satte opp sannhetsverditabeller for sammensatte utsagn i utsagnsvariablene $p$, $q$ og $r$, konstruerte vi i virkeligheten funksjoner fra mengden $X$ av tripler fra $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ til $Y = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$.

  To sammensatte utsagn er logisk ekvivalente når disse funksjonene er like.

# Definisjonsområdet og verdiområdet

## Merk

- Læreboka bruker *domain* for definisjonsområde og *codomain* for verdiområde.
- Det er ikke uvanlig å bruke ordene *domene* og *kodomene* på norsk.
- Vi skal holde oss til betegnelsene *definisjonsområde* og *verdiområde* i disse forelesningene.

# Injektive funksjoner

- Funksjoner har en ting felles med relasjoner:

  Noen av dem har spesielle egenskaper som er verd en egen betegnelse.
- Vi skal først se på injektive funksjoner.
- Andre betegnelser er 1-1-funksjoner og enentydige funksjoner.

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Injektive funksjoner)

- La $w$ være et 32-bits binært tall, og la $\mathtt{f}(w)$ være det heltallet som representeres av $w$.
- Hvis $v \neq w$ vil $\mathtt{f}(v) \neq \mathtt{f}(w)$ siden vi ikke bruker to forskjellige binære representasjoner av det samme tallet.
- Hvis vi oppfatter $\mathtt{f}$ som en *input-output*-forbindelse, ser vi at det er én input per output.
- Dette er et eksempel på en en-til-en-funksjon eller *injektiv* funksjon.

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Fortsatt)

- En telefonselger vil ha datastøttet oppringing til kunder.
- For ikke å irritere kundene unødig, bør ikke telefonselgeren kontakte samme kunde to ganger.
- Hvis $R(n)$ er kunde nummer $n$ selgeren kontakter, betyr dette kravet at $R(n) \neq R(m)$ når $n \neq m$.
- Programmet selgeren støtter seg på må være slik at oppringningsfunksjonen $R$ blir injektiv, eller enentydig.

# Injektive funksjoner

Den formelle definisjonen vil være:

## Definisjon

La $f : X \to Y$ være en funksjon.

$f$ kalles injektiv hvis vi for alle $x$ og $y$ i $X$ har at

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

# Injektive funksjoner

## Merk

- Vi har brukt den kontrapositive versjonen i definisjonen.
  En ekvivalent formulering vil være

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Injektive funksjoner)

- La $f(x) = x^2$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

  Da er ikke $f$ injektiv fordi $1 \neq -1$ mens $f(1) = f(-1)$.
- Hvis vi begrenser definisjonsområdet til de ikke-negative tallene $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ blir funksjonen injektiv.
- Funksjonen som ordner en sekvens av ord alfabetisk er ikke injektiv, fordi ord-sekvensene "Per, Pål, Espen" og "Espen, Pål, Per" er forskjellige, men de blir like når vi ordner dem alfabetisk.

# Injektive funksjoner

## Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- $f$ er en funksjon, hvor $A$ er definisjonsområdet.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt verdiområdet, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.
- Vi ser derfor på $f$ som en funksjon

$$f : A \to \mathbb{N}$$

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Fortsatt)

- Er $f$ injektiv?
- Kravet var at for alle $a$ og $b$ i $A$, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så $f$ er ikke injektiv.
- Kan vi bestemme bildemengden til $f$?
- Bildemengden vil være $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 18\}$.

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på $A$ ved hjelp av $f$:
- La $aRb$ hvis $f(a) = f(b)$.
- La $aSb$ hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
    - Er $R$ eller $S$ refleksiv?
    - Er $R$ eller $S$ irrefleksiv?
    - Er $R$ eller $S$ symmetrisk?
    - Er $R$ eller $S$ antisymmetrisk?
    - Er $R$ eller $S$ transitiv?

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på $R$ først.
  - Vi ser at $R$ er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  - Vi ser at $R$ er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  - Vi ser at $R$ er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
  - Siden $A \neq \emptyset$ og $R$ er refleksiv, er ikke $R$ samtidig *irrefleksiv*.
  - Siden $f$ ikke er injektiv og $R$ er symmetrisk, kan ikke $R$ være *antisymmetrisk*
- Det betyr at $R$ er en ekvivalensrelasjon.
- Vi har ikke brukt noen spesielle egenskaper ved $A$ eller $f$, så relasjoner konstruert på denne måten vil alltid være ekvivalensrelasjoner.

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at $R$ er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$
  4. $\{4, 13, 22, 31, 40\}$
  5. $\{5, 14, 23, 32, 41, 50\}$

     osv.

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til $S$.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
    - $S$ er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle $a$
    - La $aSb$ og $bSc$.
        - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og $aSc$.
        - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at $aSc$.
    - Vi ser at $S$ er transitiv.
    - Anta at $aSb$ og $bSa$
        - Da må $f(a) \leqslant f(b)$ og $f(b) \leqslant f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at $aRb$.
        - Da er $a \leqslant b$ og $b \leqslant a$ så $a = b$
    - Det følger at $S$ er *antisymmetrisk*.
- Konklusjonen er at $S$ er en partiell ordning.
- Oppgave: Vis at $S$ er en total ordning, og skriv ned de 10 $S$-første tallene.

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. $A$ er alle ord $w$ godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet $w$ skrevet baklengs.
  2. $B$ er mengden av uendelige desimalutviklinger $\alpha$ og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.
  3. $C$ er mengden av positive reelle tall som har en eksakt 32-bits representasjon $r$, og hvis $r$ representerer tallet $x$ lar vi $h(r)$ være tallet som representerer $\sqrt{x}$.
- $f$ vil være injektiv, for hvis vi speiler to forskjellige ord, vil speilbildene bli forskjellige.

# Injektive funksjoner

## Eksempel (Fortsatt)

- $g$ er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- $h$ kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom $2^{-24}$ og $2^{24}$, vil kvadratroten ligge mellom $2^{-12}$ og $2^{12}$.

  Vi har altså langt færre binære tall til disposisjon for å representere $\sqrt{x}$ enn $x$ selv, så funksjonen kan ikke være injektiv.
- Her har vi egentlig brukt noe som kalles skuffeprinsippet, dueslagsprinsippet eller på engelsk the pigeon hole principle.