MAT1030 – Forelesning 20

Kombinatorikk

Roger Antonsen - 14. april 2009

(Sist oppdatert: 2009-04-14 21:42)

Repetisjon

Kapittel 1–3

- algoritmer
- pseudokoder
- kontrollstrukturer
- representasjon av tall (hele og reelle tall)
- tallsystemer

Kapittel 4

- logisk holdbare argumenter
- utsagnslogikk og predikatlogikk
- utsagnslogiske bindeord og kvantorer
- parenteser
- sannhetsverditabeller, tautologier, kontradiksjoner
- logisk konsekvens, logiske lover
- bevisteknikker

Kapittel 5

- mengdelære
- notasjon
- mengdealgebra (union, snitt, komplement, mengdedifferens)
- Venndiagrammer
- kardinaltall, potensmengder, ordnede par
- binære relasjoner og egenskaper ved disse
- ekvivalensrelasjoner og partielle ordninger

Kapittel 6

- funksjoner
- terminologi, verdiområde, definisjonsområde
- surjektive og injektive funksjoner
- sammensetning og invers av funksjoner

Kapittel 7

- rekursjon og induksjon
- rekursive funksjoner
- induksjonsbevis
- rekurrenslikninger
- induktivt definerte mengder, f.eks.
  - mengden av ord over et alfabet
  - mengden av utsagnslogiske formler
  - mengden av parentesuttrykk
- generell rekursjon og induksjon

Kapittel 9: Kombinatorikk

Kombinatorikk

- Kombinatorikk er studiet av *opptellinger*, *kombinasjoner* og *permutasjoner*.
- Vi finner svar på spørsmål “Hvor mange måter ...?” uten å telle.
- Viktig del av f.eks. kompleksitetsanalyse av algoritmer.
  - Hvor mye *tid* bruker en algoritme?
  - Hvor mye *plass* bruker en algoritme?
- Grunnleggende, nyttig og fascinerende matematikk som dere må beherske.
- Vi bruker denne uken på kapittel 9.

Eksempel.
- Spørsmål:
  Når de syv rette lottotallene er trukket ut, hvor mange forskjellige rekker har seks rette?
- Svar:
  Det er syv forskjellige måter å plukke ut seks rette fra de syv rette.
  Det er 27 måter å velge ut det ene tallet som er feil.
  Det gir $7 \cdot 27 = 189$ forskjellige rekker med seks rette.

- Kombinatorikk inngår som et vesentlig element i sannsynlighetsteori.
- Kombinatorikk inngår også når man skal vurdere hvor lang tid et program trenger for å nå i mål og når man skal vurdere hvor stor lagringsplass man må sette av for at et program eller en programpakke skal få det nødvendige arbeidsrommet.
- Lagring av data i forskjellige registere kan illustreres ved lagring av kuler i bokser.
- Et naturlig spørsmål vil da være hvor mange forskjellige måter dette kan gjøres på.
- I dette eksemplet skal vi anta at vi har tretten kuler og fire bokser.
- Hvis vi spør om på hvor mange måter vi kan fordele 13 kuler på fire forskjellige bokser, er det to mulige presiseringer.

Eksempel (Tilfelle 1).

- Alle kulene er forskjellige.
- Da har vi 13 kuler, og vi har fire muligheter for plassering av hver kule.
- Det gir
$$4^{13}$$
mulige fordelinger.

Eksempel (Tilfelle 2).

- Kulene er like, mens boksene fortsatt er forskjellige, kall dem A, B, C og D.
- La
$$xxxxxxxxxxxxxxxx$$
være en mengde med 16 elementer (en mindre enn antall kuler pluss antall bokser).
- Det fins
$$\binom{16}{3}$$
måter å omgjøre tre x til X på.

Eksempel (Tilfelle 2, fortsatt).

- Eksempel
$$xxxXxxxxXxxXxxxx$$
- I dette tilfellet plasserer vi tre kuler i A (foran første X), fire kuler i B (mellom første og andre X), to kuler i C (mellom andre og tredje X) og fire kuler i D (bak siste X).
- Alle plasseringer av de tre X'ene gir oss en fordeling av kulene på de fire boksene.

Eksempel (Tilfelle 2, fortsatt).

- Omvendt vil en fordeling av 13 kuler på boksene A, B, C og D gi oss en plassering av X'ene.
- Har vi to kuler i A, to i B, fem i C og fire i D svarer det til
$$xxXxxXxxxxxXxxxx.$$

Merk.

- Vi kunne ha formulert problemet om antall fordelinger også i det tilfellet hvor det ikke er forskjell på boksene.
- Det krever imidlertid at vi går ut over læreboka i en retning som ikke er prioritert, så det skal vi la ligge.
- Vi kunne også ha sett på tilfellet der vi har seks hvite og syv røde kuler.
- Dette er en utfordring dere bør kunne håndtere selv når vi er ferdige med kapittel 9.

- Vi skal komme tilbake til opptelling av mulige fordelinger i forskjellige situasjoner.
- Først skal vi imidlertid se på en sammenheng mange kjenner fra sannsynlighetsteorien.
- I læreboka går den under betegnelsen Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet.

Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet

Eksempel.

- På en skole er det 177 elever som driver aktiv idrett.

  103 av elevene er aktive om sommeren og 85 av elevene er aktive om vinteren.

  Det betyr at det er 188 aktiviteter fordelt på 177 elever.

  For at dette skal stemme, må 11 av elevene drive både sommer- og vinteridrett, siden det er 11 flere aktiviteter enn det er elever.
- Hvis vi lar S være mengden av elever som driver sommeridrett og V være mengden av elever som driver vinteridrett, ser vi at
  - $|S| = 103$
  - $|V| = 85$
  - $|S \cup V| = 177$
  - $|S \cap V| = 11$

Eksempel (Fortsatt).

- Det siste tallet regnet vi ut på grunnlag av de tre første.
- Vi ser at $|S| + |V| = |S \cup V| + |S \cap V|$ fordi det at det er flere aktiviteter enn elever skyldes at noen driver to aktiviteter, og differensen mellom antall aktiviteter og antall elever må være nøyaktig antallet på de som driver både sommer- og vinteridrett.

Teorem (Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet).

La A og B være to endelige mengder.

Da er $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Bevis.

Hvis vi først teller opp elementene i A og deretter elementene i B, har vi talt elementene i $A \cap B$ to ganger.

For å få antall elementer i $A \cup B$ må vi derfor trekke fra det vi har talt for mye, nemlig antallet i $A \cap B$.

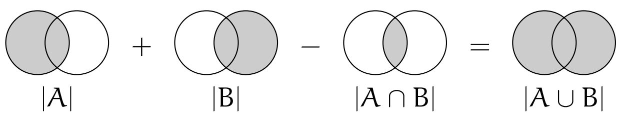
Merk.

- Det er en nær sammenheng mellom *inklusjons- og eksklusjonsprinsippet* og en tilsvarende lov om sannsynlighet:

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

  når A og B er uavhengige hendelser og P måler en sannsynlighet.
- Begge lovene illustreres greit med et Venn-diagram, hvor man ser at hvis vi skraverer sirkelskiven som markerer A i en retning og sirkelskiven som markerer B i en annen retning, er det akkurat feltet som markerer $A \cap B$ vi skraverer to ganger.

- Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet:



Eksempel.

- Anta at vi har fått følgende oppgave:

  Av 231 studenter var det 174 som greide oppgave 1 og 175 som greide oppgave 2.

  Alle studentene greide minst en oppgave.

  Hvor mange studenter greide begge oppgavene?

Eksempel (Fortsatt).

- Løsning:

  La A være mengden av studenter som greide oppgave 1 og B mengden av studenter som greide oppgave 2.

  Da er $|A \cup B| = 231$, $|A| = 174$ og $|B| = 175$.

  Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet sier oss at

$$231 = 174 + 175 - |A \cap B|.$$

  Det gir oss at

$$|A \cap B| = 174 + 175 - 231 = 118.$$

  Det var 118 studenter som greide begge oppgavene.

Eksempel.

La oss se på følgende oppgave:

- Medlemmene i et idrettslag blir bedt om å registrere seg på nettet med navn, adresse og enten e-postadresse eller mobilnummer.

  Ledelsen ønsker å automatisere utsendelsen av informasjon, uten å bruke to informasjonskanaler til samme medlem, men av de 728 medlemmene er det 94 som har oppgitt både e-postadresse og mobilnummer.

  Når vi vet at 562 medlemmer oppga e-postadresse, hvor mange oppga da mobilnummer?

Eksempel (Fortsatt).

- Løsning:

  La A være mengden av medlemmer som oppga e-postadresse og B være mengden av de som oppga mobilnummer.

  Da sier inklusjons- og eksklusjonsprinsippet at

$$728 = 562 + |B| - 94$$

  så

$$|B| = 728 + 94 - 562 = 260.$$

  Det var 260 medlemmer som oppga mobilnummer.

Multiplikasjonsprinsippet

- Det neste prinsippet for beregning av antall muligheter vi skal se på er multiplikasjonsprinsippet.
- Multiplikasjonsprinsippet sier at hvis vi skal treffe en serie uavhengige valg, vil det totale antall muligheter være produktet av antall muligheter ved hvert valg.
- Igjen fins det en klar parallell i sannsynlighetsteori, hvor vi fins sannsynligheten for at en serie uavhengige hendelser finner sted ved å ta produktet av sannsynlighetene for enkelthendelsene.
- Vi skal illustrere dette prinsippet ved et par eksempler.

Eksempel.

- Et norsk registreringsnummer for bil består av to store bokstaver og fem siffre.
- Vi bruker ikke bokstavene G, I, O, Q, Æ, ø eller Å, fordi de enten ikke forekommer utenlands, eller fordi de kan forveksles med tall eller andre bokstaver.
- Da står vi igjen med $22 \cdot 22 = 484$ bokstavkombinasjoner.
- Første siffer i nummeret må være et av de ni tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mens de fire andre sifrene kan hentes fra alle de ti tallsymbolene.
- Det gir tilsammen
$$22 \cdot 22 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 43.760.000$$
mulige registreringsnummere på norske biler.

Eksempel (Fortsatt).

- Svenskene bruker tre bokstaver og tre tall, og hadde de begrenset seg til de bokstavene vi bruker i Norge, ville de kunne registrert færre biler.

Oppgave.

Hvor mange bokstaver må svenskene tillate for å kunne registrere like mange biler (eller fler) enn det nordmennene kan?

Eksempel.

- Amerikanske lærebokforfattere lever i den tro at amerikanske collegestudenter lever en ikke ubetydelig del av livet sitt med å spise sammen.
- Derfor er følgende oppgave typisk for amerikanske lærebøker i diskret matematikk.

- En sandwich-bar tilbyr:
  1. Fire typer brød: Fint, mellomgrovt, grovt og glutenfritt.
  2. Tre typer smøring: Smør, majones og sennep.
  3. Seks typer hovedpålegg: Kalkun, roastbeef, skinke, tunfisk, skalldyr og soyaprotein.
  4. Fire typer tilbehør: Stekt bacon, salat, agurk og tomat.
  5. Tre valg på dressing, Thousen Islands, tomatdressing eller hvitløksdressing.
- Hvor mange forskjellige sandwicher er det mulig å komponere?

Eksempel (Fortsatt).

Selv om ikke alle sammensetningene vil være like vellykkede rent smaksmessig, er det ingen føringer på hvilke valg som kan kombineres.

Da finner vi det totale antall muligheter ved å bruke multiplikasjonsprinsippet.

- Vi har da
$$4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 = 864$$
forskjellige sammensetninger.

Vi har nå gjennomgått nok teori til at følgende oppgave skal være lett:

Oppgave.

a) Vi skal fordele syv like hvite kuler og seks like røde kuler på fire forskjellige bokser.

Hvor mange måter kan dette gjøres på?

b) Hvis vi krever at de hvite kulene skal ligge i de tre første boksene og de røde i de tre siste, hvor mange mulige fordelinger har vi da?

c) Løs a) hvis vi i utgangspunktet bare hadde tre bokser, og sammenlikn svaret med svaret fra b).

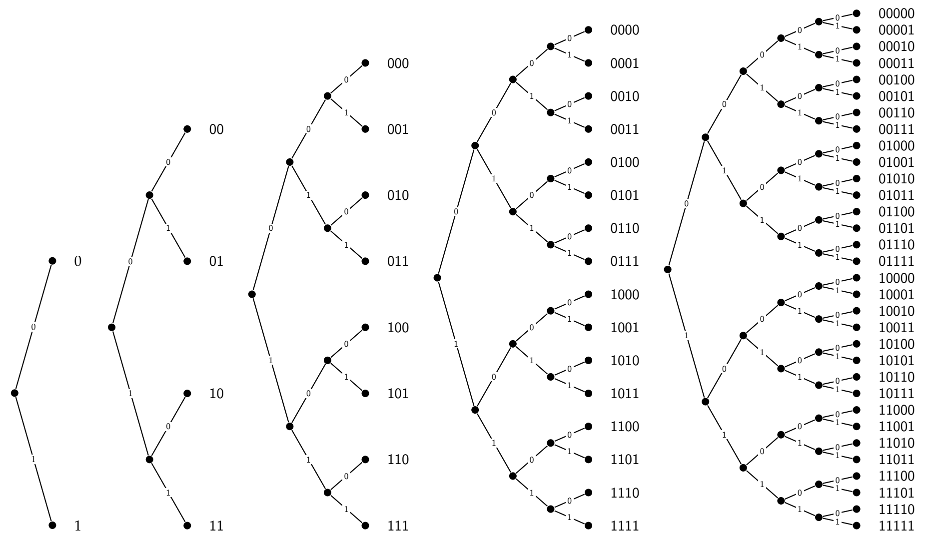
Forklar det du observerer.

- Multiplikasjonsprinsippet:
Hvis vi skal treffe en serie uavhengige valg, vil det totale antall muligheter være produktet av antall muligheter ved hvert valg.
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
Antall elementer i det kartesiske produktet $A \times B$ er antall elementer i A multiplisert med antall elementer i B.
- Begge prinsippene kan generaliseres til flere enn to mengder.

  - Generaliseringen av inklusjons- og eksklusjonsprinsippet ses lett ved hjelp av Venn-diagrammer.
  - Generaliseringen av multiplikasjonsprinsippet blir

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Eksempel - det er 2^n binære tall av lengde n

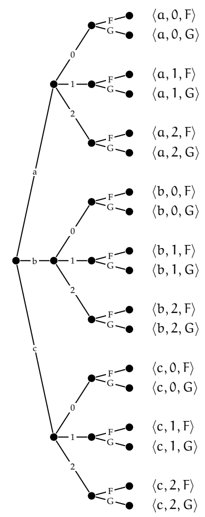


Eksempel - $\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}$

Multiplikasjonsprinsippet gir oss følgende:

$$\begin{aligned} &|\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}| \\ &= |\{a, b, c\}| \cdot |\{0, 1, 2\}| \cdot |\{F, G\}| \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Vi kan illustrere det slik:



Permutasjoner

- Det neste vi skal se på er hva vi mener med en permutasjon og på hvordan vi kan telle opp antall permutasjoner av en ordnet mengde.
- En permutasjon er en endring av en rekkefølge, eller en omstokking.

- Når vi stokker en kortstokk er poenget at kortene skal ligge i en annen rekkefølge, og med en fremmedord kan vi si at vi permuterer kortene.
- Vi skal se på noen eksempler.

Eksempel.

- På hvor mange forskjellige måter kan vi skrive tallene 1, 2 og 3 i rekkefølge?
- Vi har tre valg for hvilket tall vi vil skrive først: 1, 2 eller 3.
- For hvert av disse valgene har vi to valg for hvilket som blir det neste tallet;

  Starter vi med 1 må det neste tallet være 2 eller 3, starter vi med 2 må det neste tallet være 1 eller 3 og starter vi med 3 må det neste tallet være 1 eller 2.
- Har vi bestemt hvilke to tall vi skriver først, gir det siste tallet seg av seg selv.
- Det fins altså $3 \cdot 2 = 6$ måter å skrive disse tre tallene i rekkefølge på.

Eksempel.

- Hvis vi utvider eksemplet vårt fra forrige side til å omfatte tallene 1, 2, 3 og 4 vil antall permutasjoner vokse til $4! = 24$ og tar vi med 5 i tillegg er antallet $5! = 120$.
- I det siste tilfellet har vi først fem valg for hvilket tall som skal skrives først, deretter fire valg for tall nr. 2, tre valg for tall nr. 3 og to valg for tall nr. 4. Det siste tallet gir seg selv.
- Generelt fins det $n!$ permutasjoner av tallene $1, \ldots, n$.
- Dette svarer også til hvor mange rekkefølger vi kan sette n elementer i. Eksempelvis kan syv studenter ordnes på $7! = 6720$ måter.

Definisjon (Permutasjon).
En *permutasjon* en endring av rekkefølgen av elementene i en ordnet mengde. Vi sier også at en *permutasjon* av en mengde er en ordning av elementene i mengden.

Eksempel.
Permutasjonene av $\{A, B, C\}$ er ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- Det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer.
- Og vi vet (selvfølgelig) at $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$
- I eksempelet har vi 3 elementer og $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutasjoner.

Eksempel.

- Et kjent problem i litteraturen er Den handelsreisendes problem (The traveling salesman).
- Hvis vi har gitt n byer som skal besøkes, og vi kjenner avstanden mellom to og to av byene, hva er da den korteste veien gjennom alle byene?
- Det er ennå ingen som har kommet opp med et program som løser dette problemet når antall byer er stort, som for eksempel alle tettsteder i Norge med mer enn 300 innbyggere.
- Vi skal se på hva dette problemet kan ha med antall permutasjoner å gjøre.

Eksempel (Fortsatt).

Hvis antall byer som skal besøkes er mindre, blir selvfølgelig oppgaven gjennomførbar.

Anta at vi har fått i oppdrag å skrive et program som finner den korteste reiseruten fra by A til by B, og som går gjennom ti andre byer $C_1, \ldots, C_{10}$ i en eller annen rekkefølge.

Igjen kan vi anta at alle avstander er kjent.

En måte å gjøre dette på er å liste opp alle mulige rekkefølger vi kan besøke byene $C_1, \ldots, C_n$ i, regne ut alle reiselengdene og så velge ut den korteste.

Problemet er at det fins $10! = 3.628.800$ forskjellige rekkefølger vi kan velge mellom.

Eksempel (Fortsatt).

- Det betyr altså at det fins over tre og en halv million måter å reise fra Oslo til Kirkenes på, når reisen skal gå via
  - Kristiansand
  - Stavanger
  - Bergen
  - Molde
  - Kristiansund
  - Trondheim
  - Bodø
  - Narvik
  - Tromsø
  - Alta

Eksempel (Fortsatt).

øker vi antall byer som skal besøkes til 12, hvis vi for eksempel vil besøke Haugesund og Levanger i tillegg, vil vi være i nærheten av 400.000.000 enkeltruter, og da begynner de raske maskinene å slite.

Det vil gå flere generasjoner maskiner mellom hver gang vi kan øke antall byer med 1 hvis vi bruker denne naive måten.

Eksempel (Fortsatt).

- Det man i praksis gjør er å akseptere at det er dumt å bruke år på å finne ut av om man kan spare noen få kilometers reise, og utvikler raske algoritmer som gir effektive reiseruter, uten å garantere at den finner den mest effektive.
- Det fins elektroniske reiseplanleggere som må forene hensynet til kort regnetid og et godt resultat.
- Tilsvarende optimeringsproblemer finner man for effektiv utnyttelse av lagerplass, effektiv organisering av produksjonsleddene i en bedrift og liknende.

Eksempel.

- Dette eksemplet er stjålet fra en tidligere lærebok i diskret matematikk.
- Hvor mange ord kan vi skrive ved hjelp av bokstavene i

$$\text{MISSISSIPPI?}$$

- Det er 11 bokstaver, og har vi en blytype for hver bokstav, kan vi sette disse i 11! forskjellige rekkefølger.

Eksempel (Fortsatt).

- Rekkefølgen vi setter de to P'ene i, betyr imidlertid ikke noe for resultatet. Det alene halverer antall ord vi kan skrive.
- Det er fire I'er og fire S'er. Den innbyrdes rekkefølgen blant I'ene og blant S'ene betyr heller ikke noe for hvordan det ferdige ordet ser ut.
- Det er $4! = 24$ måter å trykke de fire S'ene og $4! = 24$ måter å trykke de fire I'ene på.
- Det betyr at antall forskjellige ord vi kan skrive er

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650.$$

Oppgave.

Hvor mange forskjellige ord kan vi skrive ved å stokke om på bokstavene i ordet

PUSLESPILL

Regn ut svaret fullstendig.