# MAT1030 – Diskret Matematikk

## Forelesning 21: Mer kombinatorikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

15. april 2009

(Sist oppdatert: 2009-04-15 00:06)

# Kapittel 9: Mer kombinatorikk

# Plan for dagen

# Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg ${}^nP_r$

# Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg $^{n}P_{r}$
- Mer om kombinasjoner $\binom{n}{r}$ "$n$ velg $r$"

# Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg $\quad {}^{n}P_{r}$
- Mer om kombinasjoner $\quad \binom{n}{r} \quad$ "$n$ velg $r$"
- Binomialkoeffisientene

# Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg $^{n}P_{r}$
- Mer om kombinasjoner $\binom{n}{r}$ “$n$ velg $r$”
- Binomialkoeffisientene
- Pascals trekant

# Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg $^{n}P_{r}$
- Mer om kombinasjoner $\binom{n}{r}$ "$n$ velg $r$"
- Binomialkoeffisientene
- Pascals trekant
- Generalisering av første kvadratsetning $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

# Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg $\quad {}^nP_r$
- Mer om kombinasjoner $\quad \binom{n}{r} \quad$ "$n$ velg $r$"
- Binomialkoeffisientene
- Pascals trekant
- Generalisering av første kvadratsetning $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Oppsummering av kombinatoriske prinsipper

# Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg $^{n}P_{r}$
- Mer om kombinasjoner $\binom{n}{r}$ "$n$ velg $r$"
- Binomialkoeffisientene
- Pascals trekant
- Generalisering av første kvadratsetning $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Oppsummering av kombinatoriske prinsipper
- Eksempler og oppgaver

# Ordnet utvalg

# Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles ordnet utvalg fra en mengde.

# Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles ordnet utvalg fra en mengde.

## Eksempel

# Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles ordnet utvalg fra en mengde.

## Eksempel

Oppgave:

# Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles ordnet utvalg fra en mengde.

## Eksempel

Oppgave:

I et barneskirenn er det med 20 barn.

# Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles ordnet utvalg fra en mengde.

## Eksempel

Oppgave:

I et barneskirenn er det med 20 barn.

Det er lov til å opplyse om hvem som tok de tre første plassene, mens resten ikke skal rangeres.

# Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles ordnet utvalg fra en mengde.

### Eksempel

Oppgave:

I et barneskirenn er det med 20 barn.

Det er lov til å opplyse om hvem som tok de tre første plassene, mens resten ikke skal rangeres.

Hvor mange forskjellige resultatlister kan man få?

# Ordnet utvalg

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

- Legg merke til at

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

- Legg merke til at

$$20 \cdot 19 \cdot 18$$

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

- Legg merke til at

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1}$$

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

- Legg merke til at

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{20!}{(20-3)!}$$

# Ordnet utvalg

## Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

- Legg merke til at

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{20!}{(20-3)!}$$

- Vi skal nå definere dette mer generelt og bruke notasjonen ${}^{20}P_3$ for dette tallet.

# Definisjon

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^{n}P_{r}$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^{n}P_{r}$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$.

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^{n}P_{r}$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^{n}P_{r}$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$$ {}^{n}P_{n} $$

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^nP_r$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^nP_r$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$$ {}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} $$

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^{n}P_{r}$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$$ {}^{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} $$

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^nP_r$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^nP_r$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$$ {}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} $$

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^{n}P_{r}$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$$ {}^{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! $$

## Definisjon

- La $r$ og $n$ være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

## Merk

- ${}^{n}P_{r}$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke $r$ elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med $n$ elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$$ {}^{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! $$

- Det er som forventet, siden det er $n!$ permutasjoner av en mengde med $n$ elementer i.

# Ordnet utvalg

# Ordnet utvalg

## Eksempel

# Ordnet utvalg

## Eksempel

- En idrettsleder har syv løpere i stallen sin, og skal velge ut fire av dem til å delta i en stafett.

# Ordnet utvalg

## Eksempel

- En idrettsleder har syv løpere i stallen sin, og skal velge ut fire av dem til å delta i en stafett.
- I et stafettlag spiller rekkefølgen stor rolle, især om idrettsgrenen er langrenn og det er to etapper i klassisk og to i fristil.

# Ordnet utvalg

## Eksempel

- En idrettsleder har syv løpere i stallen sin, og skal velge ut fire av dem til å delta i en stafett.
- I et stafettlag spiller rekkefølgen stor rolle, især om idrettsgrenen er langrenn og det er to etapper i klassisk og to i fristil.
- Da er det ${}^{7}P_4 = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ forskjellige mulige laguttak.

# Kombinasjoner

# Kombinasjoner

$$\binom{n}{k}$$

# Kombinasjoner

$$\binom{n}{k}$$

angir hvor mange delmengder med $k$ elementer det finnes av en mengde med $n$ elementer

# Kombinasjoner

$$\binom{n}{k}$$

angir hvor mange delmengder med $k$ elementer det finnes av en mengde med $n$ elementer

- Vi har tidligere vist dette ved induksjon.

# Kombinasjoner

$$\binom{n}{k}$$

angir hvor mange delmengder med $k$ elementer det finnes av en mengde med $n$ elementer

- Vi har tidligere vist dette ved induksjon.
- Det er også mulig å vise dette rent kombinatorisk, som vi skal gjøre snart.

# Kombinasjoner

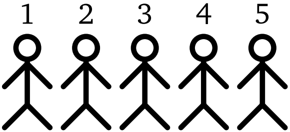
$$\binom{n}{k}$$

angir hvor mange delmengder med $k$ elementer det finnes av en mengde med $n$ elementer

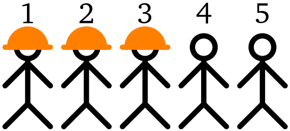
- Vi har tidligere vist dette ved induksjon.
- Det er også mulig å vise dette rent kombinatorisk, som vi skal gjøre snart.
- Slike tall kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.

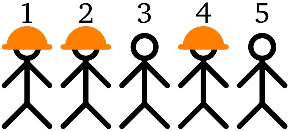
- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



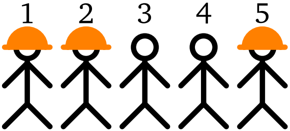
- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



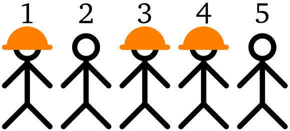
- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



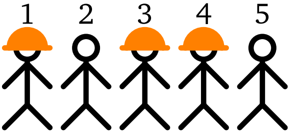
- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.

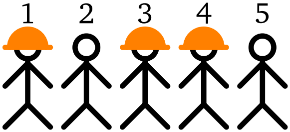


- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



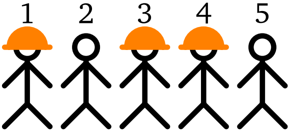

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



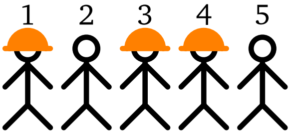

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



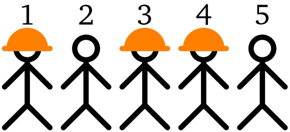

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^{5}P_{3}$

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



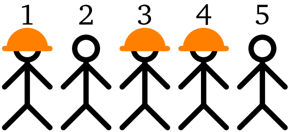

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



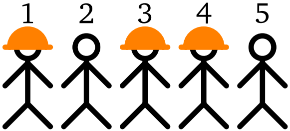

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



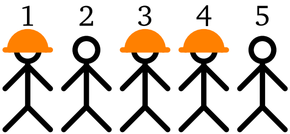

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli telt $3! = 6$ ganger

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



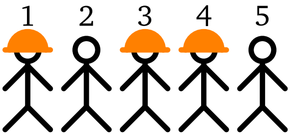

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^{5}P_{3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli telt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



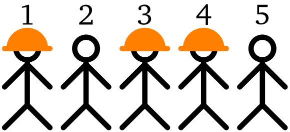

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli telt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.
- Hvis vi skal ta høyde for dette, så må vi dele på 6.

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



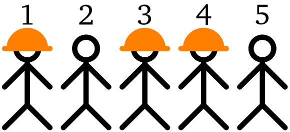

- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli telt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.
- Hvis vi skal ta høyde for dette, så må vi dele på 6.
- Antall måter å fordele hattene er derfor

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.




- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^{5}P_{3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli telt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.
- Hvis vi skal ta høyde for dette, så må vi dele på 6.
- Antall måter å fordele hattene er derfor $60/6 = 10$

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.




- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^{5}P_{3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli telt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.
- Hvis vi skal ta høyde for dette, så må vi dele på 6.
- Antall måter å fordele hattene er derfor $60/6 = 10$, som er $\binom{5}{3}$.

# Kombinasjoner

# Kombinasjoner

## Teorem

# Kombinasjoner

## Teorem

- La $A$ være en mengde med $n$ elementer, og la $0 \leqslant k \leqslant n$.

# Kombinasjoner

## Teorem

- La $A$ være en mengde med $n$ elementer, og la $0 \leqslant k \leqslant n$.
- Da finnes det
$$\binom{n}{k}$$
forskjellige delmengder $B$ av $A$.

# Kombinasjoner

# Kombinasjoner

## Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

# Kombinasjoner

## Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge $k$ elementer *i rekkefølge* fra $A$ på er

# Kombinasjoner

## Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge $k$ elementer *i rekkefølge* fra $A$ på er

$$^{n}P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

# Kombinasjoner

## Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge $k$ elementer *i rekkefølge* fra $A$ på er

$$ {}^{n}P_k = \frac{n!}{(n-k)!} $$

- For hver delmengde $B$ med $k$ elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra $A$ som gir oss $B$.

# Kombinasjoner

## Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge $k$ elementer *i rekkefølge* fra $A$ på er

$$^{n}P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- For hver delmengde $B$ med $k$ elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra $A$ som gir oss $B$.
- Da må antall mengder $B$ med $k$ elementer være

# Kombinasjoner

## Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge $k$ elementer *i rekkefølge* fra $A$ på er

$$^{n}P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- For hver delmengde $B$ med $k$ elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra $A$ som gir oss $B$.
- Da må antall mengder $B$ med $k$ elementer være

$$\frac{^{n}P_k}{k!}$$

# Kombinasjoner

## Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge $k$ elementer *i rekkefølge* fra $A$ på er

$$^{n}P_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- For hver delmengde $B$ med $k$ elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra $A$ som gir oss $B$.
- Da må antall mengder $B$ med $k$ elementer være

$$\frac{^{n}P_{k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

# Kombinasjoner

## Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge $k$ elementer *i rekkefølge* fra $A$ på er

$$^{n}P_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- For hver delmengde $B$ med $k$ elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra $A$ som gir oss $B$.
- Da må antall mengder $B$ med $k$ elementer være

$$\frac{^{n}P_{k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

# Kombinasjoner

# Kombinasjoner

- Legg merke til at

# Kombinasjoner

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} =$$

# Kombinasjoner

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

# Kombinasjoner

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Hvorfor det?

# Kombinasjoner

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.

# Kombinasjoner

- Legg merke til at
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.

# Kombinasjoner

- Legg merke til at
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
    - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.

# Kombinasjoner

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
  - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.
  - Denne funksjonen vil være både surjektiv og injektiv.

# Kombinasjoner

- Legg merke til at
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
  - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.
  - Denne funksjonen vil være både surjektiv og injektiv.
- Derfor har vi at $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$.

# Kombinasjoner

- Legg merke til at
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
  - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.
  - Denne funksjonen vil være både surjektiv og injektiv.
- Derfor har vi at $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190.$
- Antall delmengder av størrelse $k$ må være lik antall delmengder av størrelse $n - k$.

# Kombinasjoner

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
    - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.
    - Denne funksjonen vil være både surjektiv og injektiv.
- Derfor har vi at $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$.
- Antall delmengder av størrelse $k$ må være lik antall delmengder av størrelse $n - k$.
- Det er like mange måter å velge $n$ elementer på som det er å måter å *velge bort* $n$ elementer på.

# Binomialkoeffisientene

# Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.

# Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

# Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

$$\binom{n}{k} =$$

# Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

# Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

# Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Hvorfor er det slik?

# Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Hvorfor er det slik? La oss se på et eksempel.

# Binomialkoeffisientene

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3}$$

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

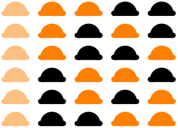
- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.

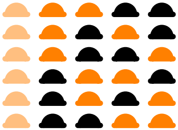


# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



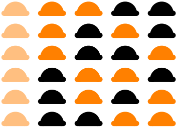
- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



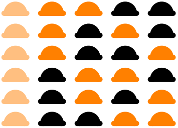
- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



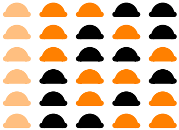
- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



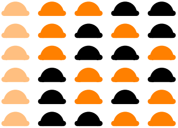
- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



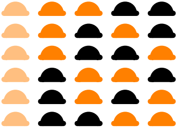
- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.

# Binomialkoeffisientene

# Binomialkoeffisientene

- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:

# Binomialkoeffisientene

- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:
  - Ved hjelp av fakultetsfunksjonen og brøk:

# Binomialkoeffisientene

- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:
  - Ved hjelp av fakultetsfunksjonen og brøk:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

# Binomialkoeffisientene

- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:
  - Ved hjelp av fakultetsfunksjonen og brøk:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

  - Ved rekursjon:

# Binomialkoeffisientene

- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:
  - Ved hjelp av fakultetsfunksjonen og brøk:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

  - Ved rekursjon:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

# Pascals trekant

# Pascals trekant

- Pascals trekant er en måte å skrive opp alle binomialkoeffisientene på ved hjelp av formelen

# Pascals trekant

- Pascals trekant er en måte å skrive opp alle binomialkoeffisientene på ved hjelp av formelen

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

# Pascals trekant

- Pascals trekant er en måte å skrive opp alle binomialkoeffisientene på ved hjelp av formelen

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Husk at

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

# Pascals trekant

- Pascals trekant er en måte å skrive opp alle binomialkoeffisientene på ved hjelp av formelen

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Husk at

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- Vi får følgende bilde.

$$\binom{5}{3}$$

$$\binom{4}{2} \qquad\qquad \binom{4}{3}$$

$$\binom{5}{3}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
& \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & \\
& & \binom{5}{3} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
& \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
& & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & \\
& & & \binom{5}{3} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
\binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & \\
 & & & \binom{5}{3} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
\binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & \\
 & & & \binom{5}{3} & &
\end{array}
$$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \binom{2}{1} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & 1 & & \\
 & 1 & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & 1 & \\
1 & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & 1 & & \\
 & 1 & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & 1 & \\
1 & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & 1 & & \\
 & 1 & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & 1 & \\
1 & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & 1 & \\
1 & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & 1
\end{array}
$$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
  - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,...

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
  - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,...
  - De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,...

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
  - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,...
  - De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,...
  - Toerpotensene: 1,2,4,8,16,32,...

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
  - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,...
  - De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,...
  - Toerpotensene: 1,2,4,8,16,32,...
  - Kvadrattallene: 1,4,9,16,25,...

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
  - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,...
  - De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,...
  - Toerpotensene: 1,2,4,8,16,32,...
  - Kvadrattallene: 1,4,9,16,25,...
  - Fibonacci-tallene (selv om de er godt gjemt): 1,1,2,3,5,8,13,21,...

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
  - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,. . .
  - De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,. . .
  - Toerpotensene: 1,2,4,8,16,32,. . .
  - Kvadrattallene: 1,4,9,16,25,. . .
  - Fibonacci-tallene (selv om de er godt gjemt): 1,1,2,3,5,8,13,21,. . .
  - Og mange flere...

# Pascals trekant

# Pascals trekant

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15
1

# Tilbake til binomialkoeffisientene

# Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a+b)^1 = a+b$.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a+b)^1 = a+b$.
- Mange vet at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a+b)^1 = a+b$.
- Mange vet at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- De fleste kan regne ut at $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a+b)^1 = a+b$.
- Mange vet at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- De fleste kan regne ut at $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Noen greier til og med å regne ut at
  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a+b)^1 = a+b$.
- Mange vet at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- De fleste kan regne ut at $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Noen greier til og med å regne ut at $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Noen bør begynne å ane at det er en sammenheng med Pascals trekant.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a+b)^1 = a+b$.
- Mange vet at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- De fleste kan regne ut at $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Noen greier til og med å regne ut at $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Noen bør begynne å ane at det er en sammenheng med Pascals trekant.
- Siden $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ blir den anelsen bekreftet.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

# Tilbake til binomialkoeffisientene

**Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)**

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^{1}$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^{1} + \binom{n}{2} a^{n-2} b^{2}$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^{1} + \binom{n}{2} a^{n-2} b^{2} + \cdots$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^{1} + \binom{n}{2} a^{n-2} b^{2} + \cdots$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1}$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall $a$ og $b$ og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1,\ldots,n\}$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1,\ldots,n\}$, så lar vi $B$ svare til leddet hvor faktor nummer $i$ er $b$ hvis $i \in B$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1, \ldots, n\}$, så lar vi $B$ svare til leddet hvor faktor nummer $i$ er $b$ hvis $i \in B$ og $a$ ellers.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1, \ldots, n\}$, så lar vi $B$ svare til leddet hvor faktor nummer $i$ er $b$ hvis $i \in B$ og $a$ ellers.
- F.eks. vil $\{1, 4, 5\}$ svare til leddet

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1,\ldots,n\}$, så lar vi $B$ svare til leddet hvor faktor nummer $i$ er $b$ hvis $i \in B$ og $a$ ellers.
- F.eks. vil $\{1,4,5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a}\cdots\underset{n}{a}$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1,\ldots,n\}$, så lar vi $B$ svare til leddet hvor faktor nummer $i$ er $b$ hvis $i \in B$ og $a$ ellers.
- F.eks. vil $\{1,4,5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a}\cdots\underset{n}{a}$
- Hvert ledd kommer fra en og bare en mengde $B$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1,\ldots,n\}$, så lar vi $B$ svare til leddet hvor faktor nummer $i$ er $b$ hvis $i \in B$ og $a$ ellers.
- F.eks. vil $\{1,4,5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a}\cdots\underset{n}{a}$
- Hvert ledd kommer fra en og bare en mengde $B$; det vi har beskrevet er en surjektiv og injektiv funksjon

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1,\ldots,n\}$, så lar vi $B$ svare til leddet hvor faktor nummer $i$ er $b$ hvis $i \in B$ og $a$ ellers.
- F.eks. vil $\{1,4,5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a}\cdots\underset{n}{a}$
- Hvert ledd kommer fra en og bare en mengde $B$; det vi har beskrevet er en surjektiv og injektiv funksjon fra potensmengden av $A$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi $2^n$ ledd.
- Hvert ledd består av $n$ faktorer, hvor hver faktor er enten $a$ eller $b$, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1,\ldots,n\}$, så lar vi $B$ svare til leddet hvor faktor nummer $i$ er $b$ hvis $i \in B$ og $a$ ellers.
- F.eks. vil $\{1,4,5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a}\cdots\underset{n}{a}$
- Hvert ledd kommer fra en og bare en mengde $B$; det vi har beskrevet er en surjektiv og injektiv funksjon fra potensmengden av $A$ til leddene vi får når vi regner ut $(a+b)^n$.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis (Fortsatt)

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis (Fortsatt)

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av $A$ med $k$ elementer.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis (Fortsatt)

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av $A$ med $k$ elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med $k$ $b$'er og $n-k$ $a$'er.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis (Fortsatt)

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av $A$ med $k$ elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med $k$ $b$'er og $n-k$ $a$'er.
- Disse leddene ordnes til

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis (Fortsatt)

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av $A$ med $k$ elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med $k$ $b$'er og $n-k$ $a$'er.
- Disse leddene ordnes til

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Dette er nøyaktig leddet med indeks $k$ i teoremet.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis (Fortsatt)

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av $A$ med $k$ elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med $k$ $b$'er og $n-k$ $a$'er.
- Disse leddene ordnes til

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

- Dette er nøyaktig leddet med indeks $k$ i teoremet.
- Siden $k$ er vilkårlig må formelen i teoremet gi oss verdien på $(a+b)^n$.

# Tilbake til binomialkoeffisientene

## Bevis (Fortsatt)

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av $A$ med $k$ elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med $k$ $b$'er og $n-k$ $a$'er.
- Disse leddene ordnes til

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

- Dette er nøyaktig leddet med indeks $k$ i teoremet.
- Siden $k$ er vilkårlig må formelen i teoremet gi oss verdien på $(a+b)^n$.
- Dette avslutter beviset.

# Oppsummering av regneprinsipper

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^{n}P_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^{n}P_{r}$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_{2} = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^{n}P_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
  - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
  - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?
  - Det er $\binom{5}{2}$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
  - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?
  - Det er $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^{n}P_{r}$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_{2} = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
  - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?
  - Det er $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

# Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: $n^r$
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
  - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?
  - Det er $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$
- Vi skal se på noen flere eksempler.

# Først en liten digresjon om store tall

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå:

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.
- Atomer i en vanndråpe:

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.
- Atomer i en vanndråpe: $10^{21}$ atomer.

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.
- Atomer i en vanndråpe: $10^{21}$ atomer.
- Atomer i universet:

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.
- Atomer i en vanndråpe: $10^{21}$ atomer.
- Atomer i universet: $10^{80}$ atomer.

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.
- Atomer i en vanndråpe: $10^{21}$ atomer.
- Atomer i universet: $10^{80}$ atomer.
- Antall forfedre 265 generasjoner tilbake

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.
- Atomer i en vanndråpe: $10^{21}$ atomer.
- Atomer i universet: $10^{80}$ atomer.
- Antall forfedre 265 generasjoner tilbake = antall atomer i universet.

# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.
- Atomer i en vanndråpe: $10^{21}$ atomer.
- Atomer i universet: $10^{80}$ atomer.
- Antall forfedre 265 generasjoner tilbake = antall atomer i universet.
- Og disse tallene er ganske små...

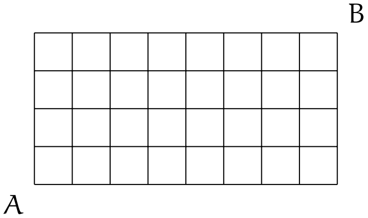
# Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: $10^6$ atomer.
- Atomer i en vanndråpe: $10^{21}$ atomer.
- Atomer i universet: $10^{80}$ atomer.
- Antall forfedre 265 generasjoner tilbake = antall atomer i universet.
- Og disse tallene er ganske små...
- Allikevel kan vi representere dem og regne på dem uten store problemer.

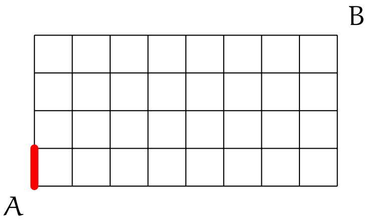
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



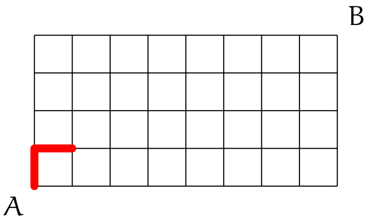
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



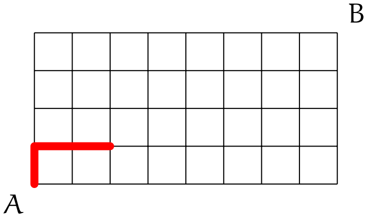
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



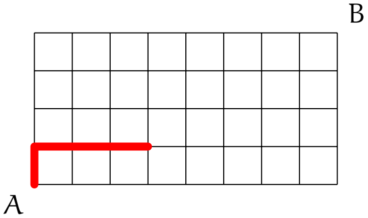
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



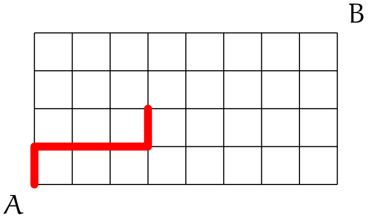
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



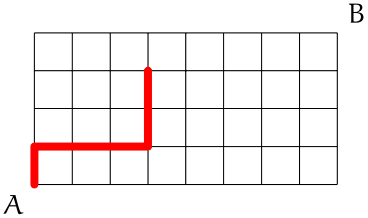
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



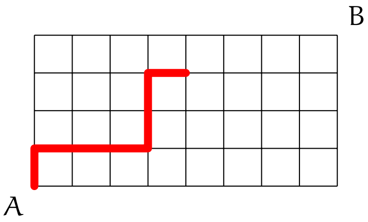
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til B i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



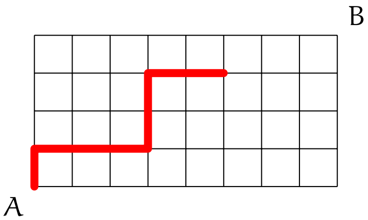
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



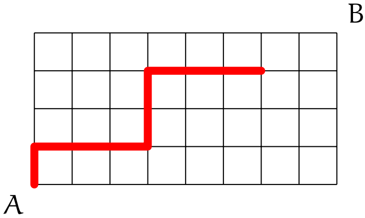
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



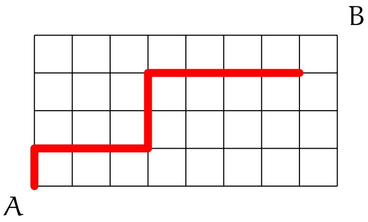
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



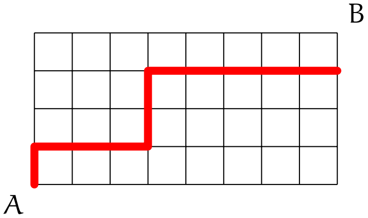
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



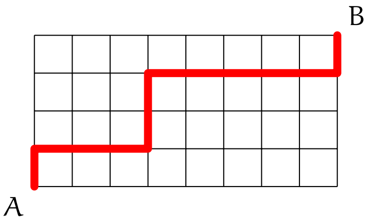
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



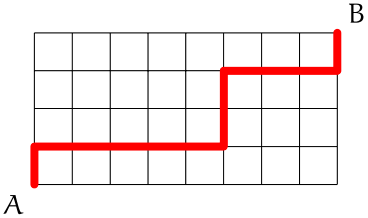
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til B i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



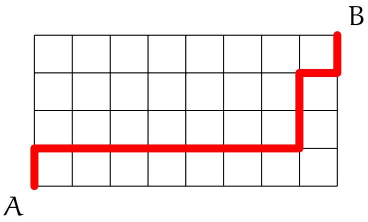
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



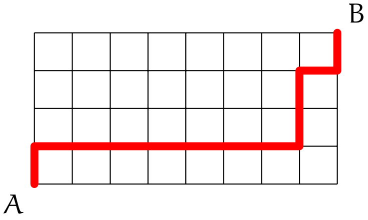
# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $\mathrm{B}$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



# Eksempel

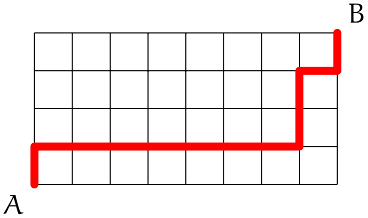
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.




- Hvor mange slike stier er det?

# Eksempel

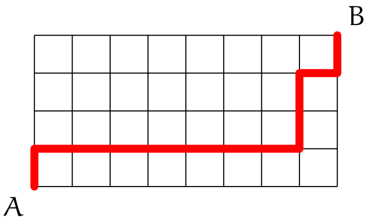
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.




- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.

# Eksempel

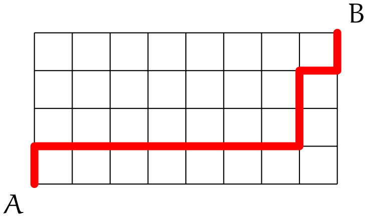
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.




- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$

# Eksempel

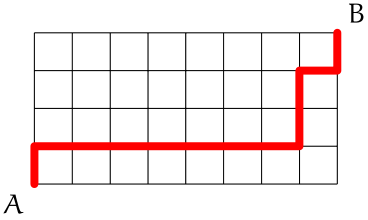
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.




- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er $\uparrow$

# Eksempel

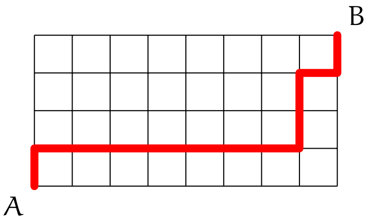
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.




- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er $\uparrow$ og åtte av tegnene er $\rightarrow$.

# Eksempel

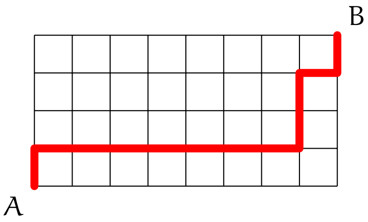
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.




- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er $\uparrow$ og åtte av tegnene er $\rightarrow$.
- Hvor mange slike ord er det?

# Eksempel

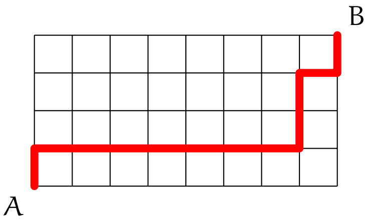
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.




- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er $\uparrow$ og åtte av tegnene er $\rightarrow$.
- Hvor mange slike ord er det? Det er $\binom{12}{4}$

# Eksempel

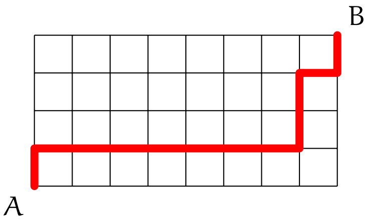
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.




- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er $\uparrow$ og åtte av tegnene er $\rightarrow$.
- Hvor mange slike ord er det? Det er $\binom{12}{4} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

# Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra A til B i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



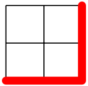

- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er $\uparrow$ og åtte av tegnene er $\rightarrow$.
- Hvor mange slike ord er det? Det er $\binom{12}{4} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$

# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:

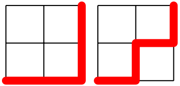
# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



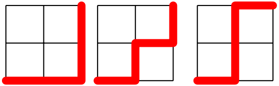
# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



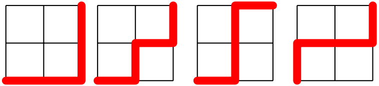
# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



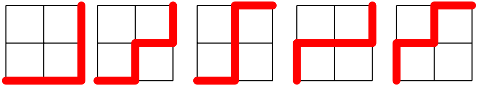
# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



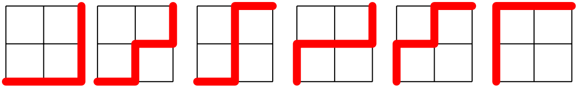
# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



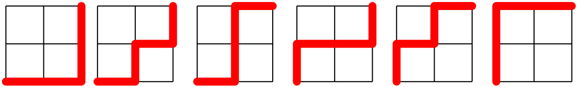
# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



# Eksempel

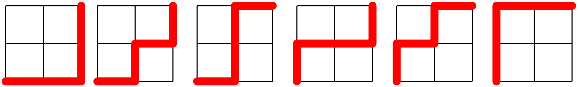
- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



- Antall ord blir i dette tilfellet:

# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:

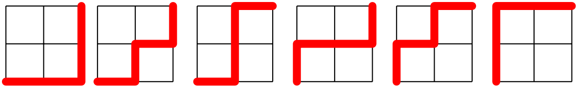


- Antall ord blir i dette tilfellet:

$$\binom{4}{2}$$

# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:

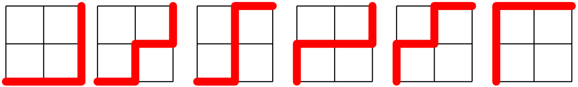


- Antall ord blir i dette tilfellet:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$$

# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:

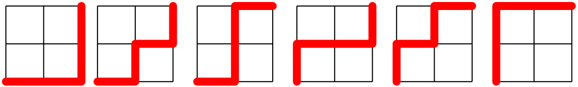


- Antall ord blir i dette tilfellet:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

# Eksempel

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



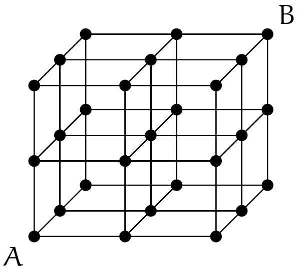
- Antall ord blir i dette tilfellet:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

som stemmer...

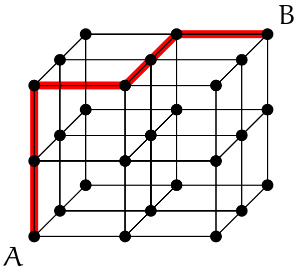
# Oppgave

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i denne $2 \times 2 \times 2$-kuben? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover, til høyre eller innover?



# Oppgave

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra $A$ til $B$ i denne $2 \times 2 \times 2$-kuben? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover, til høyre eller innover?



# Eksempel

# Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)

# Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?

# Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?
- Vi ikke er interessert i hvilken karakter en bestemt student får, men kun antallet av hver karakter i fordelingen.

# Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?
- Vi ikke er interessert i hvilken karakter en bestemt student får, men kun antallet av hver karakter i fordelingen.
- Det er 6 muligheter for hver av de 10 studentene.

# Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?
- Vi ikke er interessert i hvilken karakter en bestemt student får, men kun antallet av hver karakter i fordelingen.
- Det er 6 muligheter for hver av de 10 studentene.
- Kan vi bruke multiplikasjonsprinsippet og si at svaret er $6^{10}$?

# Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?
- Vi ikke er interessert i hvilken karakter en bestemt student får, men kun antallet av hver karakter i fordelingen.
- Det er 6 muligheter for hver av de 10 studentene.
- Kan vi bruke multiplikasjonsprinsippet og si at svaret er $6^{10}$? Nei

# Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?
- Vi ikke er interessert i hvilken karakter en bestemt student får, men kun antallet av hver karakter i fordelingen.
- Det er 6 muligheter for hver av de 10 studentene.
- Kan vi bruke multiplikasjonsprinsippet og si at svaret er $6^{10}$? Nei
- La oss lage 6 båser og putte studentene i hver sin bås avhengig av hvilken karakter de får.

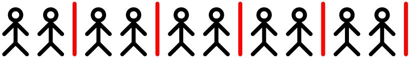
# Eksempel

# Eksempel

- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:

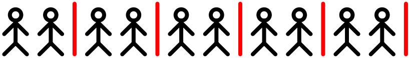
# Eksempel

- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



# Eksempel

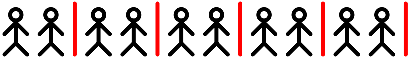
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



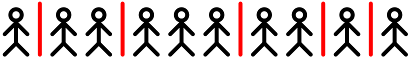
- Fordelingen 123211 kan representeres slik:

# Eksempel

- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:

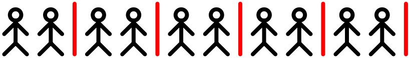


- Fordelingen 123211 kan representeres slik:

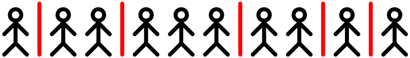


# Eksempel

- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



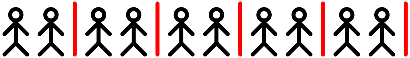
- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



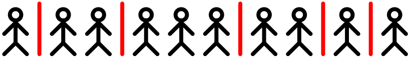
- At alle stryker kan representeres slik:

# Eksempel

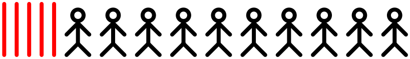
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:

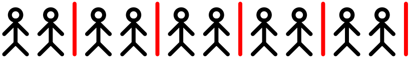


- At alle stryker kan representeres slik:

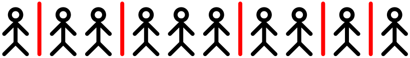


# Eksempel

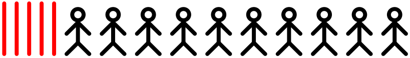
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



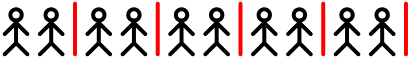
- At alle stryker kan representeres slik:



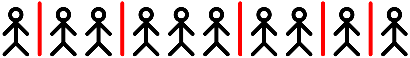
- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?

# Eksempel

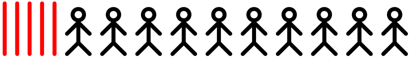
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



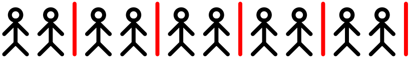
- At alle stryker kan representeres slik:



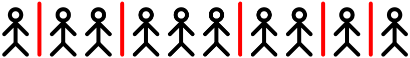
- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?
- Av 15 tegn må 5 være røde streker.

# Eksempel

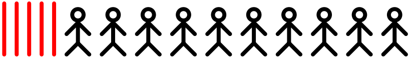
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



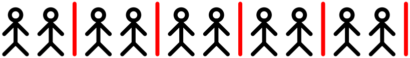
- At alle stryker kan representeres slik:



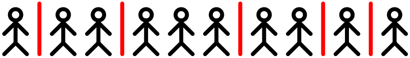
- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?
- Av 15 tegn må 5 være røde streker.
- Antall muligheter må være

# Eksempel

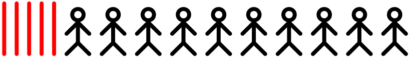
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



- At alle stryker kan representeres slik:

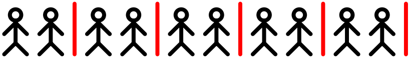


- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?
- Av 15 tegn må 5 være røde streker.
- Antall muligheter må være

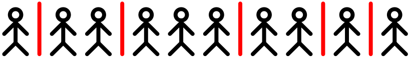
$$\binom{15}{5}$$

# Eksempel

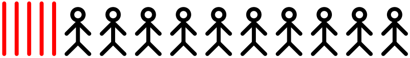
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



- At alle stryker kan representeres slik:

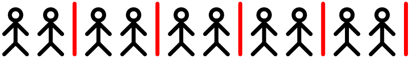


- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?
- Av 15 tegn må 5 være røde streker.
- Antall muligheter må være

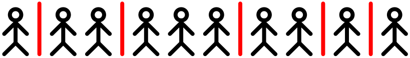
$$\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

# Eksempel

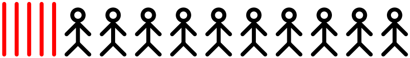
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



- At alle stryker kan representeres slik:



- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?
- Av 15 tegn må 5 være røde streker.
- Antall muligheter må være

$$\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003$$

# Eksempel

# Eksempel

Eksempel

- Mer generelt har vi

# Eksempel

Eksempel

- Mer generelt har vi

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

# Eksempel

Eksempel

- Mer generelt har vi

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

som gir hvor mange forskjellige måter vi kan fordele $n$ identiske elementer i $k$ forskjellige beholdere på.

# Eksempel

Eksempel

- Mer generelt har vi
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$
som gir hvor mange forskjellige måter vi kan fordele $n$ identiske elementer i $k$ forskjellige beholdere på.
- Dette kalles også for uordnet utvalg *med repetisjon*.

# Grafteori

# Grafteori

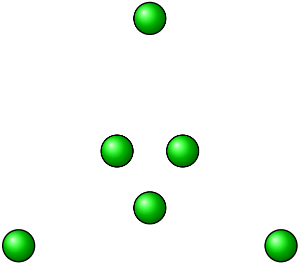
- Neste gang begynner vi med *grafteori*.

# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:

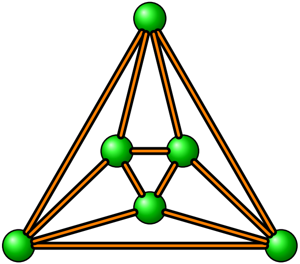
# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



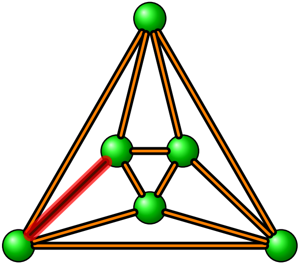
# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



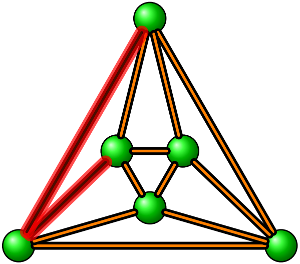
# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



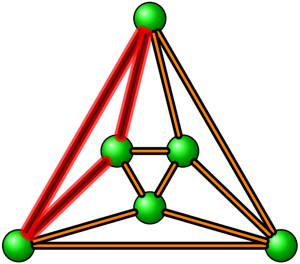
# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



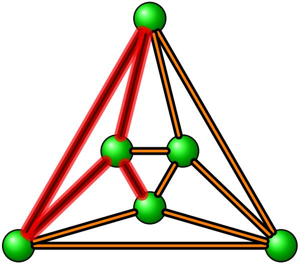
# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



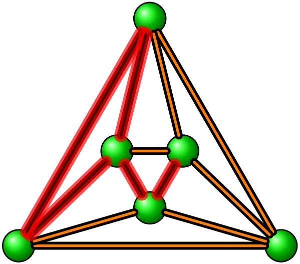
# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



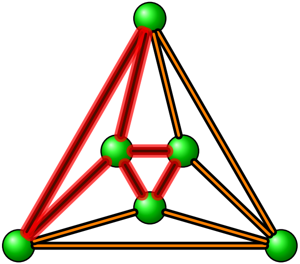
# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



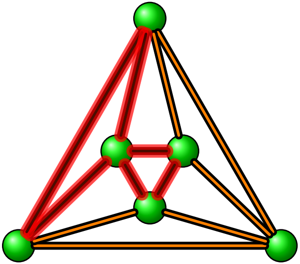
# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



# Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



- Oppgave: klarer dere å tegne denne på et ark uten å løfte blyanten og uten å gå over en kant to ganger?