MAT1030 – Forelesning 25

Trær

Roger Antonsen - 29. april 2009

(Sist oppdatert: 2009-04-29 00:28)

Forelesning 25

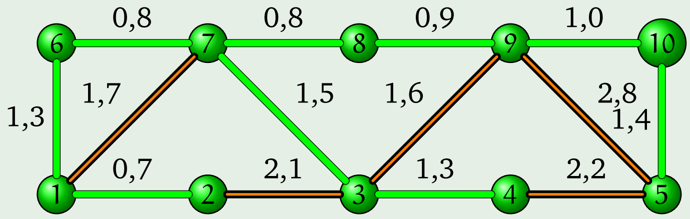
Litt repetisjon

- Vi har snakket om grafer og trær. Av begreper vi så på var følgende.
- Eulerstier og Eulerkretser
- Hamiltonstier og Hamiltonkretser
- Vektede grafer
- Minimale utspennende trær
- Vi minner om at en *vektet graf* er en enkel graf hvor hver kant har en vekt, et ikke-negativt reelt tall.
- Hvis G er en sammenhengende graf, vil et utspennende tre være en delgraf T slik at
  - T har de samme nodene som G.
  - T er et tre, det vil si, T er sammenhengende og inneholder ingen sykler.
- Vi så forrige gang at hvis G har n noder, vil et utspennende tre ha $n - 1$ kanter.
- En konsekvens er at hver gang vi velger ut $n - 1$ kanter fra G slik at vi ikke får noen sykler, så får vi et utspennende tre.

Prims algoritme

Eksempel (Fortsatt).

- Så lenge vi har listet opp kantene i rekkefølge og alltid velger den kanten med minst vekt som kommer først i listen vår, spiller det ingen rolle hvor vi starter.
- Hvis vi starter i Node 8 bygger vi opp treet slik.



- Det ble det samme treet til slutt.

- Vi gir en pseudokode for Prims algoritme.

- Den ser litt annerledes ut enn den som står i boka, men effekten, skritt for skritt, er den samme.

1 *Input* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ [Nodene i G]

2 *Input* $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ [Kantene i G]

3 $T \leftarrow \{v_1\}$

4 $K \leftarrow \emptyset$

5 **While** $E \neq \emptyset$ **do**

   5.1 $x \leftarrow$ *første* $e_i \in E$ *slik at* e_i *ligger inntil en node i* T *og har minimal vekt blant disse.*

   5.2 $y \leftarrow$ *noden ved* x som ikke ligger i T

   5.3 $K \leftarrow K \cup \{x\}$

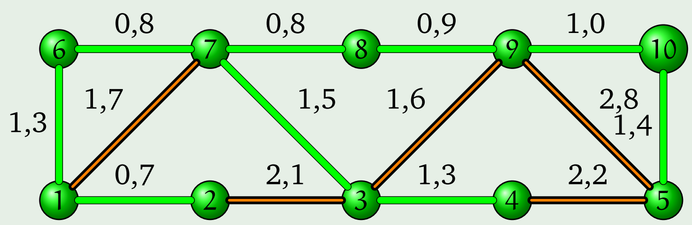
   5.4 $T \leftarrow T \cup \{y\}$

   5.5 $E \leftarrow E - \{e_i$; e_i *ligger inntil to noder i* $T\}$.

6 *Output* (T, K).

- Det fins en fremgangsmåte som ikke er avhengig av at vi starter noe sted, og som også vil gi oss det samme treet.
- Her bygger vi ikke opp et tre, men små deltrær som til sist vil vokse seg sammen til et tre.
- Vi utnytter at vi får et utspennende tre bare vi tar med $n-1$ kanter uten å lage noen sykler.
- Hver gang legger vi til en ny kant med minimal vekt slik at vi ikke får noen sykler.
- Fins det flere aktuelle kanter med samme minimale vekt, velger vi den som står først i listen vår.
- I eksemplet vårt vil da det utspennende treet bygge seg opp slik som på neste side.

Eksempel (Fortsatt).



- Vi får fortsatt det samme treet

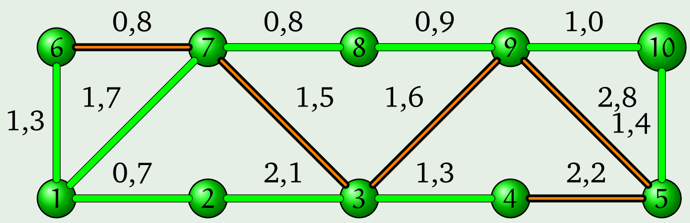
Dijkstras algoritme

- Et annet naturlig problem i forbindelse med vektede grafer er å finne et utspennende tre slik at hver node har en minimal avstand til en gitt "sentralnode".
- Her tenker vi oss at vektene svarer til lengder av de enkelte kantene.
- Det fins effektive algoritmer for dette også.
- Vi skal gi en uformell beskrivelse av Dijkstras algoritme og vise hvordan den virker på eksemplet vårt.

- Vi skal se at vi denne gangen får et annet tre.
- For dette problemet er også treet vi får avhengig av hvilken node som velges som "sentrum".
- Anta at vi har en vektet graf G med en opplisting av n noder og endel kanter.
- Vi starter med en *sentrumsnode* v_1 og lar T_1 bestå av noden v_1 og ingen kanter.
- Ved rekursjon på $i \leqslant n$ konstruerer vi et tre T_i med i noder og $i - 1$ kanter fra G.
- Vi konstruerer T_{i+1} fra T_i når $i < n$ ved følgende prosedyre:
  1. Finn den noden v utenom T_i og den kanten e som er slik at e forbinder v til T_i, og vi oppnår den kortest mulige veien fra v_1 til v, via T_i og e, på denne måten.
  2. Fins det flere like gode alternativer, velg den v'en og deretter den e'en som står først i listene.
  3. Utvid T_i til T_{i+1} ved å legge til noden v og kanten e.
- Dijkstras algoritme er beskrevet i form av en pseudokode i boka.
- Det er meningen at dere skal kunne finne det utspennende treet som gir de korteste stiene fra provinsen til sentrum når dere har fått gitt en vektet, sammenhengende graf.
- La oss se på eksemplet vårt en gang til.

Eksempel.

- Vi starter i Node 1
- Vi får et nytt tre.

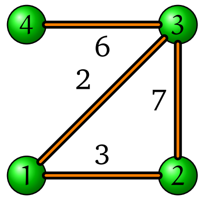


Representasjoner

- Når vi beskriver algoritmer som finner bestemte typer trær i vektede grafer, ligger det selvfølgelig under at vi tenker oss at disse algoritmene skal kunne programmeres.
- Det betyr at det må være mulig å representere disse vektede grafene digitalt.
- Vi har tidligere sett hvordan grafer kan representeres som matriser.
- Siden matriser kan representeres digitalt, betyr det at også grafer kan representeres digitalt.
- Vektede grafer kan også representeres som matriser.
- Vi følger boka, og lar ∞ representere at det ikke fins noen kant mellom to noder.
- Hvis vi tolker grafen som en strømkrets hvor vektene representerer motstanden i hver enkelt ledning, vil det at vi ikke har noen direkte kobling mellom to noder svare til at vi har en ledning med uendelig motstand mellom dem.

- Vi illustrerer dette med et eksempel.

En vektet graf.

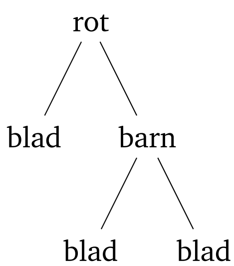


Matriserepresentasjonen.

	1	2	3	4
1	0	3	2	∞
2	3	0	7	∞
3	2	7	0	6
4	∞	∞	6	0

Trær med rot

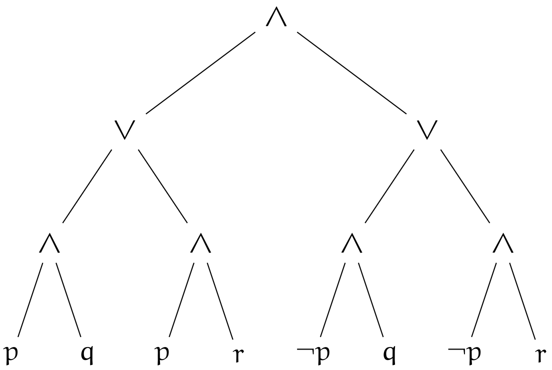
- Til nå har vi sett på trær som sammenhengende grafer uten løkker.
- Det betyr at vi ikke har noe dynamisk bilde av disse trærne, de har ikke noe startpunkt eller noen rot.
- For mange anvendelser av teorien for trær, er det nyttig å kunne betrakte den ene noden som roten til treet, den noden alt annet har vokst ut fra.
- Formelt sett er et tre med rot definert som et grafteoretisk tre hvor en av nodene er utpekt som rot.
- Det er imidlertid vanlig å tegne slike trær litt annerledes enn trær uten rot.



- Roten tegnes øverst, og treet "vokser" nedover.
- Nodene ligger i "lag" avhengig av avstanden til roten.
- Vi kan snakke om barna til en node, og om bladene til et tre med rot.

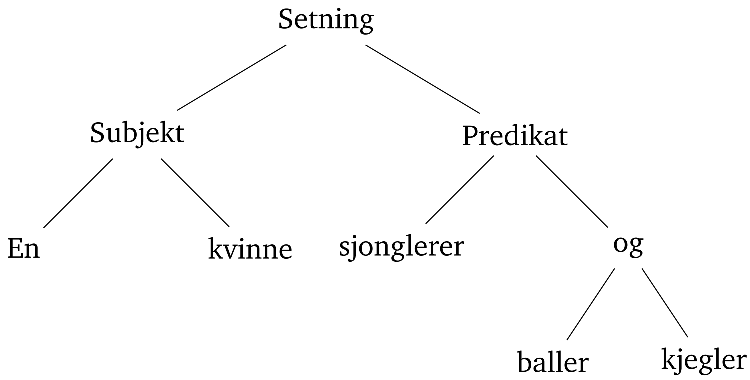
Vi skal se på endel eksempler før vi går nærmere inn på terminologien.

- Vi kan bruke trær til å gi en grafisk fremstilling av en utsagnslogisk formel.
- La $A = ((p \land q) \lor (p \land r)) \land ((\neg p \land q) \lor (\neg p \land r))$.
- Mengden av formler er bygget opp induktivt, og oppbyggingen av hver formel kan beskrives som et tre:

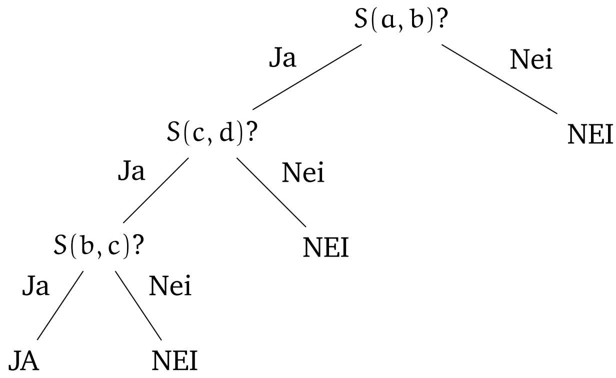


- Et tre som det på forrige side kaller vi ofte et syntakstre.
- Et syntakstre forteller oss hvordan et ord i et litt komplisert formelt språk er bygget opp av enklere ord.
- Syntakstrær kan brukes i grammatikkanalyse av setninger i naturlige språk.
- Da setter man opp et tre som beskriver hvordan en setning f.eks. er bygget opp av subjekt og predikat, hvordan subjektet kan bestå av en artikkel og et substantiv, osv.
- Som et eksempel skal vi se et slikt tre på neste side, uten at bruken av slike trær skal være noe tema for disse forelesningene.

- *En kvinne sjonglerer baller og kjegler.*
- Denne setningen er bygget opp slik.



- Trær kan ofte brukes til å beskrive forskjellige algoritmer hvor man stiller visse spørsmål, og prosessen videre avhenger av svarene på de enkelte spørsmålene.
- I læreboka står det et eksempel på et tre av spørsmål som kan brukes til å bestemme rekkefølgen på tre forskjellige tall a, b og c.
- Vi skal se på en spørsmålsserie som avgjør om fire individer, a, b, c og d, tilhører samme art.
- Vi skriver $S(x, y)$ for at x og y tilhører samme art.
- Det å tilhøre samme art er en ekvivalensrelasjon, og korrekthet av programmet bygger utelukkende på dét (på samme måte som korrekthet av eksemplet i boka bygger på at vi har en total ordning).



- Det er verd å merke seg at prosedyren over faktisk sjekker om a, b, c og d står i relasjon S til hverandre når S er en transitiv relasjon.
- Vi sjekker først $S(a,b)$.
- Får negativt svar gir algoritmen negativt svar.
- Får vi positivt svar sjekker vi $S(c,d)$.
- Får vi positivt svar her også sjekker vi til slutt $S(b,c)$.
- Hvis S er transitiv vet vi at a, b, c og d ligger etter hverandre i S-relasjonen.
- En algoritme som virker for veldig mange tolkninger av input kalles gjerne en polymorf algoritme; det vil si at den virker på mange strukturer.
- Sorteringsalgoritmer er eksempler på polymorfe algoritmer.
- Hvis vi tar utgangspunkt i et tre uten rot, og så tegner det som et tre med rot, vil det visuelle resultatet avhenge mye av hvor vi plasserer roten.

Oppgave.

- Tegn følgende tre som et tre med rot når vi plasserer roten henholdsvis i nodene 1, 3 og 6: