MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 26: Trær

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

5. mai 2009

(Sist oppdatert: 2009-05-06 22:27)

Forelesning 26

Litt repetisjon

Litt repetisjon

- Prims algoritme

Litt repetisjon

- Prims algoritme
  - finne det minste utspennende treet i en vektet graf

Litt repetisjon

- Prims algoritme
  - finne det minste utspennende treet i en vektet graf
  - en *grådig* algoritme i den forstand at den vurderer lokalt hva som er det beste neste skrittet

Litt repetisjon

- Prims algoritme
  - finne det minste utspennende treet i en vektet graf
  - en *grådig* algoritme i den forstand at den vurderer lokalt hva som er det beste neste skrittet
- Dijkstras algoritme

Litt repetisjon

- Prims algoritme
  - finne det minste utspennende treet i en vektet graf
  - en *grådig* algoritme i den forstand at den vurderer lokalt hva som er det beste neste skrittet
- Dijkstras algoritme
  - en av nodene er *sentrum*

Litt repetisjon

- Prims algoritme
  - finne det minste utspennende treet i en vektet graf
  - en *grådig* algoritme i den forstand at den vurderer lokalt hva som er det beste neste skrittet
- Dijkstras algoritme
  - en av nodene er *sentrum*
  - finne det treet som gir kortest mulig vei fra hver av de andre nodene til sentrum

Litt repetisjon

- Prims algoritme
  - finne det minste utspennende treet i en vektet graf
  - en *grådig* algoritme i den forstand at den vurderer lokalt hva som er det beste neste skrittet
- Dijkstras algoritme
  - en av nodene er *sentrum*
  - finne det treet som gir kortest mulig vei fra hver av de andre nodene til sentrum
- Matriserepresentasjoner

Litt repetisjon

- Prims algoritme
  - finne det minste utspennende treet i en vektet graf
  - en *grådig* algoritme i den forstand at den vurderer lokalt hva som er det beste neste skrittet
- Dijkstras algoritme
  - en av nodene er *sentrum*
  - finne det treet som gir kortest mulig vei fra hver av de andre nodene til sentrum
- Matriserepresentasjoner
- Trær med rot

Litt repetisjon

- Prims algoritme
  - finne det minste utspennende treet i en vektet graf
  - en *grådig* algoritme i den forstand at den vurderer lokalt hva som er det beste neste skrittet
- Dijkstras algoritme
  - en av nodene er *sentrum*
  - finne det treet som gir kortest mulig vei fra hver av de andre nodene til sentrum
- Matriserepresentasjoner
- Trær med rot
  - en av nodene har status som *rot*

Trær med rot

Trær med rot

Definisjon

Trær med rot

Definisjon

- La T være et tre med rot (anta at vi tegner T med roten øverst).

Trær med rot

Definisjon

- La T være et tre med rot (anta at vi tegner T med roten øverst).
- Med nivået til en node mener vi antall kanter mellom noden og roten.

Trær med rot

Definisjon

- La T være et tre med rot (anta at vi tegner T med roten øverst).
- Med nivået til en node mener vi antall kanter mellom noden og roten.
- Hvis det fins en kant mellom node a og b, og a har lavest nivå (ligger øverst i tegningen) sier vi at b er barnet til a.

Trær med rot

Definisjon

- La T være et tre med rot (anta at vi tegner T med roten øverst).
- Med nivået til en node mener vi antall kanter mellom noden og roten.
- Hvis det fins en kant mellom node a og b, og a har lavest nivå (ligger øverst i tegningen) sier vi at b er barnet til a.
- Hvis det fins en sti mellom to noder slik at

  så vil den som har det høyeste nivået (ligger nederst i tegningen) være etterkommer til den andre, som omvendt er forgjenger til den første.

Trær med rot

Definisjon

- La T være et tre med rot (anta at vi tegner T med roten øverst).
- Med nivået til en node mener vi antall kanter mellom noden og roten.
- Hvis det fins en kant mellom node a og b, og a har lavest nivå (ligger øverst i tegningen) sier vi at b er barnet til a.
- Hvis det fins en sti mellom to noder slik at
  - en kant k i stien ligger inntil nodene a og b (det vil si at sekvensen akb er en del av stien) nøyaktig når b er barnet til a,

  så vil den som har det høyeste nivået (ligger nederst i tegningen) være etterkommer til den andre, som omvendt er forgjenger til den første.

Trær med rot

Trær med rot

Definisjon (Fortsatt)

Trær med rot

Definisjon (Fortsatt)

- En node som ikke har noen barn er et blad eller en løvnode.

Trær med rot

Definisjon (Fortsatt)

- En node som ikke har noen barn er et blad eller en løvnode.
- En gren er en sti fra roten til et blad.

Trær med rot

Definisjon (Fortsatt)

- En node som ikke har noen barn er et blad eller en løvnode.
- En gren er en sti fra roten til et blad.

  (Noen vil kalle dette en maksimal gren og la en gren være en sti fra roten til en node.)

Trær med rot

Definisjon (Fortsatt)

- En node som ikke har noen barn er et blad eller en løvnode.
- En gren er en sti fra roten til et blad.

  (Noen vil kalle dette en maksimal gren og la en gren være en sti fra roten til en node.)

Oppgave

Vis at det finnes en bijeksjon mellom mengden av blader og mengden av grener i et tre med rot.

Binære trær

Binære trær

- Veldig mange trør har den egenskapen at hvis en node ikke er en bladnode, så har den nøyaktig to barn.

Binære trær

- Veldig mange trør har den egenskapen at hvis en node ikke er en bladnode, så har den nøyaktig to barn.
- Vi skiller ut disse ved en egen betegnelse.

Binære trær

- Veldig mange trør har den egenskapen at hvis en node ikke er en bladnode, så har den nøyaktig to barn.
- Vi skiller ut disse ved en egen betegnelse.

Definisjon

Binære trær

- Veldig mange trør har den egenskapen at hvis en node ikke er en bladnode, så har den nøyaktig to barn.
- Vi skiller ut disse ved en egen betegnelse.

Definisjon

- Et binært tre er et tre med rot slik at følgende holder.

Binære trær

- Veldig mange trør har den egenskapen at hvis en node ikke er en bladnode, så har den nøyaktig to barn.
- Vi skiller ut disse ved en egen betegnelse.

Definisjon

- Et binært tre er et tre med rot slik at følgende holder.
  1. Enhver node er enten en bladnode eller har nøyaktig to barn.

Binære trær

- Veldig mange trør har den egenskapen at hvis en node ikke er en bladnode, så har den nøyaktig to barn.
- Vi skiller ut disse ved en egen betegnelse.

Definisjon

- Et binært tre er et tre med rot slik at følgende holder.
  1. Enhver node er enten en bladnode eller har nøyaktig to barn.
  2. Hvis en node har to barn, vil det ene barnet betegnes som barnet til venstre og det andre som barnet til høyre

Binære trær

- Veldig mange trør har den egenskapen at hvis en node ikke er en bladnode, så har den nøyaktig to barn.
- Vi skiller ut disse ved en egen betegnelse.

Definisjon

- Et binært tre er et tre med rot slik at følgende holder.
  1. Enhver node er enten en bladnode eller har nøyaktig to barn.
  2. Hvis en node har to barn, vil det ene barnet betegnes som barnet til venstre og det andre som barnet til høyre
- Det venstre deltreet får vi ved å fjerne roten og barnet til høyre og alle dets etterkommerne. Tilsvarende for det høyre deltreet. (I et deltre blir det ene barnet den nye roten.)

Binære trær

- Veldig mange trør har den egenskapen at hvis en node ikke er en bladnode, så har den nøyaktig to barn.
- Vi skiller ut disse ved en egen betegnelse.

Definisjon

- Et binært tre er et tre med rot slik at følgende holder.
  1. Enhver node er enten en bladnode eller har nøyaktig to barn.
  2. Hvis en node har to barn, vil det ene barnet betegnes som barnet til venstre og det andre som barnet til høyre
- Det venstre deltreet får vi ved å fjerne roten og barnet til høyre og alle dets etterkommerne. Tilsvarende for det høyre deltreet. (I et deltre blir det ene barnet den nye roten.)
- I et tre med kun én node kan vi ikke snakke om deltrær.

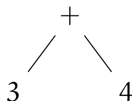
Traverseringer

Traverseringer

- En traversering av et tre innebærer at vi leser nodene i treet i en bestemt rekkefølge og utfører operasjoner (som å skrive symboler) i en bestemt rekkefølge.

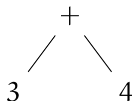
Traverseringer

- En traversering av et tre innebærer at vi leser nodene i treet i en bestemt rekkefølge og utfører operasjoner (som å skrive symboler) i en bestemt rekkefølge.
- Eksempel



Traverseringer

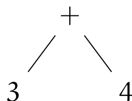
- En traversering av et tre innebærer at vi leser nodene i treet i en bestemt rekkefølge og utfører operasjoner (som å skrive symboler) i en bestemt rekkefølge.
- Eksempel



- Vi skal se på tre vanlige måter å traversere et tre på.

Traverseringer

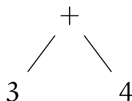
- En traversering av et tre innebærer at vi leser nodene i treet i en bestemt rekkefølge og utfører operasjoner (som å skrive symboler) i en bestemt rekkefølge.
- Eksempel



- Vi skal se på tre vanlige måter å traversere et tre på.
  - *in-order* traversering – svarer til *infiks* notasjon: $3 + 4$

Traverseringer

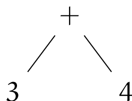
- En traversering av et tre innebærer at vi leser nodene i treet i en bestemt rekkefølge og utfører operasjoner (som å skrive symboler) i en bestemt rekkefølge.
- Eksempel



- Vi skal se på tre vanlige måter å traversere et tre på.
  - *in-order* traversering – svarer til *infiks* notasjon: $3 + 4$
  - *pre-order* traversering – svarer til *prefiks* notasjon: $+34$

Traverseringer

- En traversering av et tre innebærer at vi leser nodene i treet i en bestemt rekkefølge og utfører operasjoner (som å skrive symboler) i en bestemt rekkefølge.
- Eksempel



- Vi skal se på tre vanlige måter å traversere et tre på.
  - *in-order* traversering – svarer til *infiks* notasjon: $3 + 4$
  - *pre-order* traversering – svarer til *prefiks* notasjon: $+34$
  - *post-order* traversering – svarer til *postfiks* notasjon: $34+$

In-order-traversering

In-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *infiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *in-order_traverse(T)*:

In-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *infiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *in-order_traverse(T)*:

1. **If** T ikke er et blad **then**

In-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *infiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *in-order_traverse*(T):

1. **If** T ikke er et blad **then**
   1.1. *in-order_traverse(venstre deltre av* T*)*

In-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *infiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *in-order_traverse(*T*)*:

1. **If** T ikke er et blad **then**
   1.1. *in-order_traverse(venstre deltre av* T*)*
2. Output roten til T

In-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *infiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *in-order_traverse(T)*:

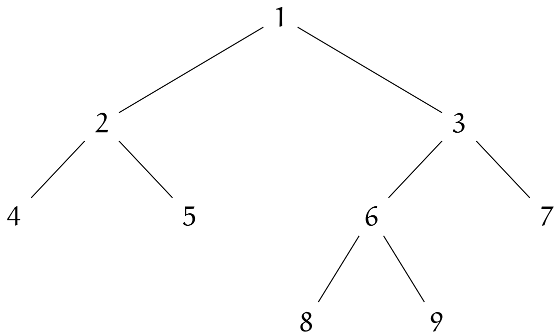
1. **If** T ikke er et blad **then**
   1.1. *in-order_traverse(venstre deltre av T)*
2. Output roten til T
3. **If** T ikke er et blad **then**

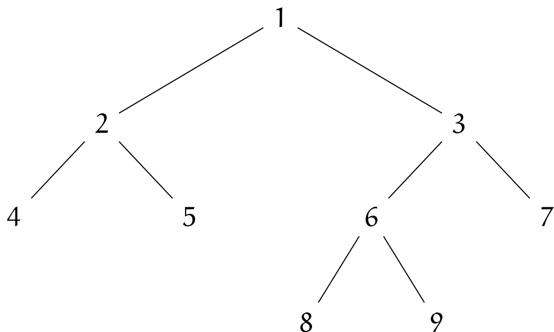
In-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *infiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

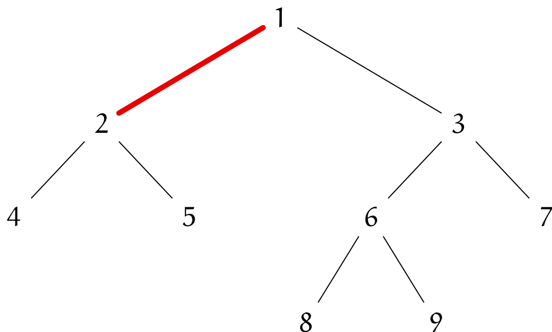
Algoritme *in-order_traverse*(T):

1. **If** T ikke er et blad **then**
   1.1. *in-order_traverse(venstre deltre av* T*)*
2. Output roten til T
3. **If** T ikke er et blad **then**
   3.1. *in-order_traverse(høyre deltre av* T*)*

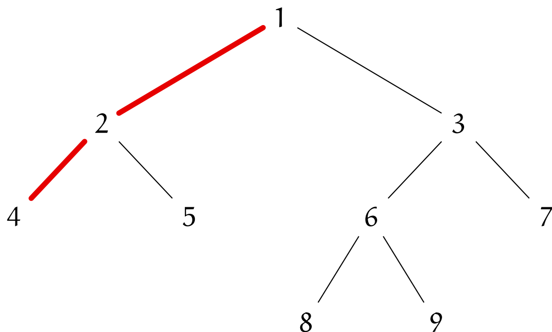

1
2
3
4
5
6
7
8
9



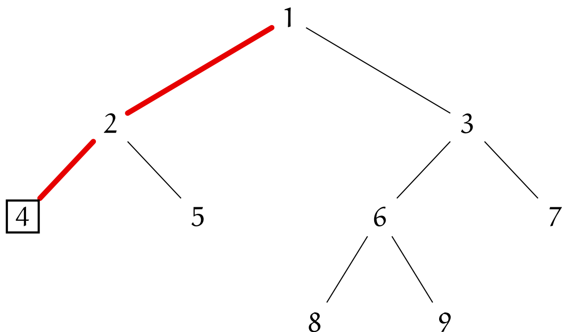
in-*order*-traversering gir



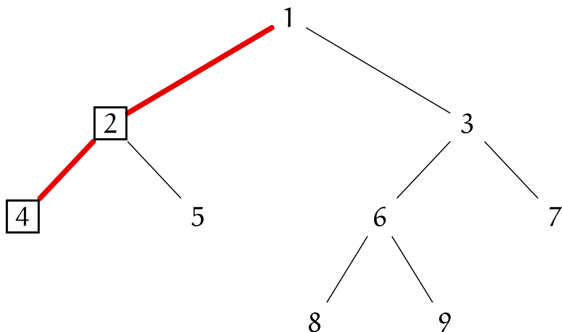
in-order-traversering gir



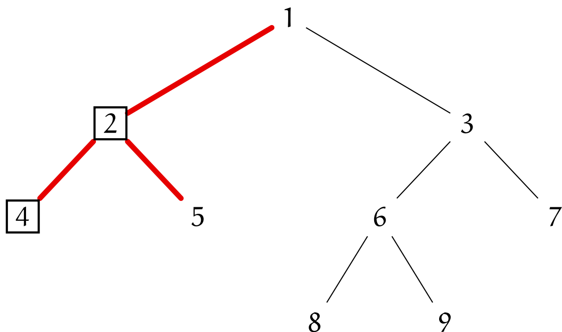
in-*order*-traversering gir



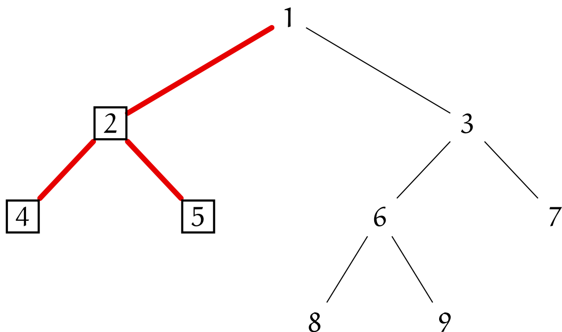
in-*order*-traversering gir 4



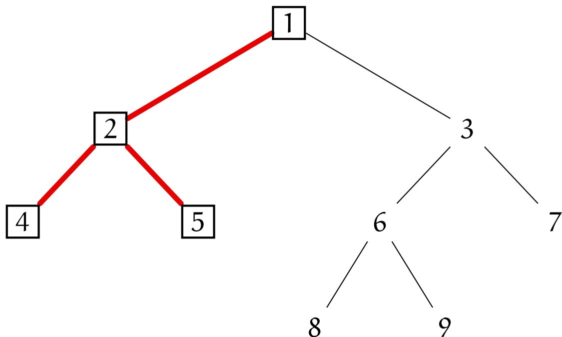
in-*order*-traversering gir 4 2



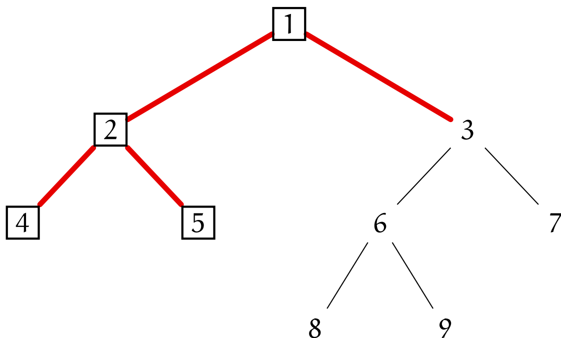
in-*order*-traversering gir 4 2



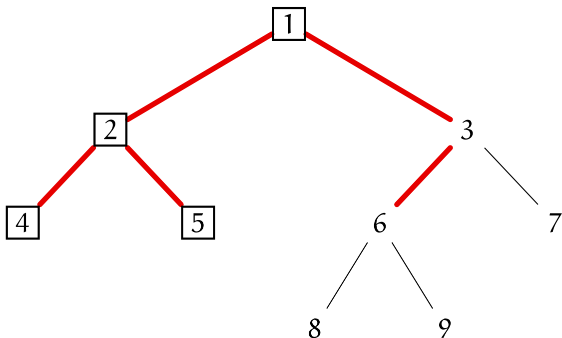
in-*order*-traversering gir 4 2 5



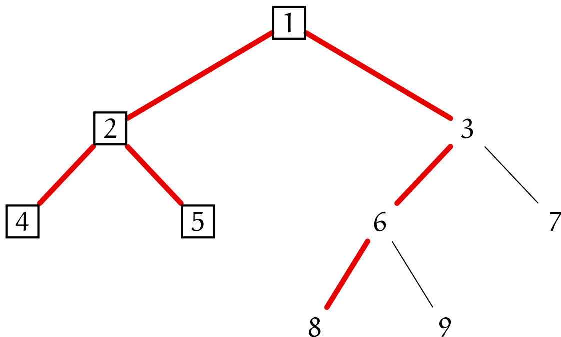
in-*order*-traversering gir 4 2 5 1



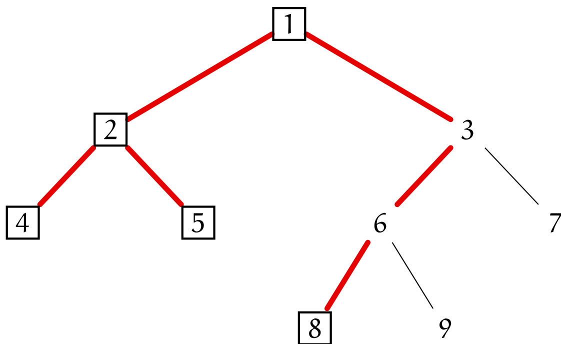
in-*order*-traversering gir 4 2 5 1



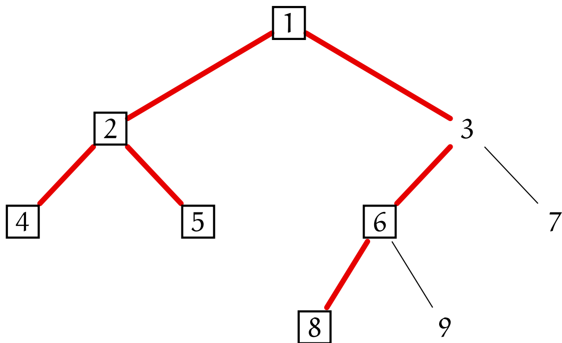
in-order-traversering gir 4 2 5 1



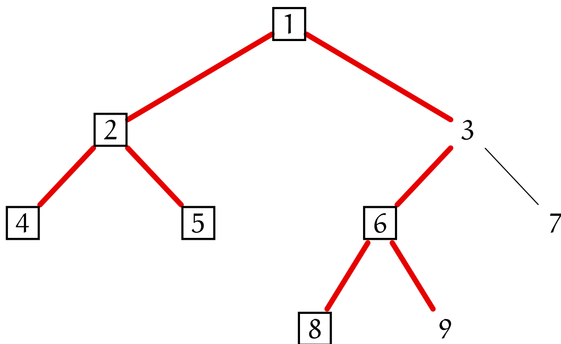
in-order-traversering gir 4 2 5 1



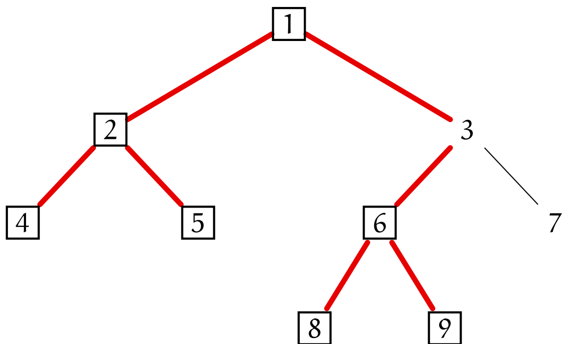
in-*order*-traversering gir 4 2 5 1 8



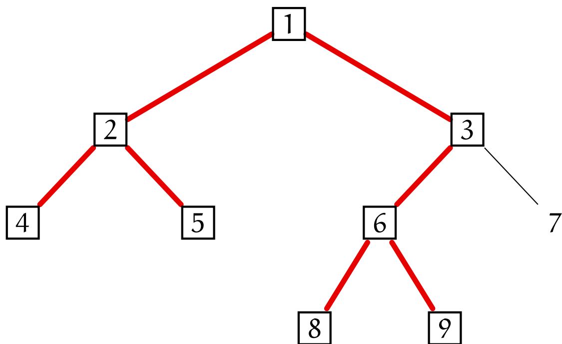
in-order-traversering gir 4 2 5 1 8 6



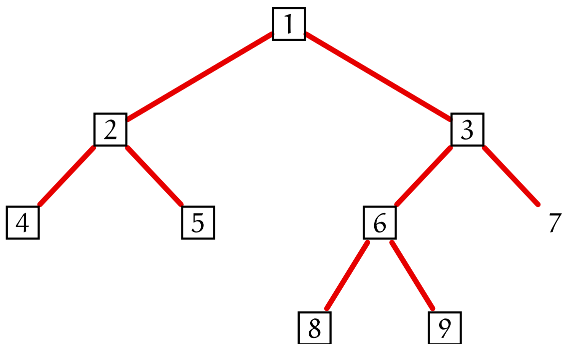
in-*order*-traversering gir 4 2 5 1 8 6



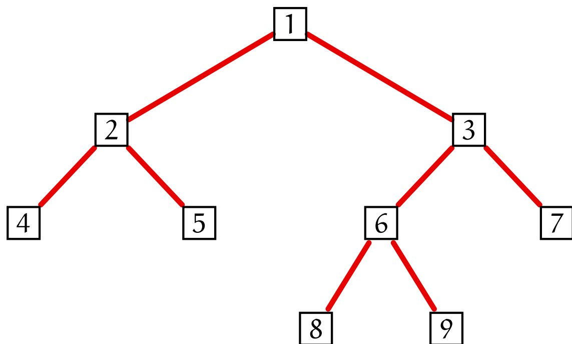
in-order-traversering gir 4 2 5 1 8 6 9



in-order-traversering gir 4 2 5 1 8 6 9 3



in-order-traversering gir 4 2 5 1 8 6 9 3



in-order-traversering gir 4 2 5 1 8 6 9 3 7

Pre-order-traversering

Pre-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *polsk prefiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Pre-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *polsk prefiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *pre-order_traverse*(T):

Pre-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *polsk prefiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *pre-order_traverse*(T):

1. Output roten til T

Pre-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *polsk prefiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *pre-order_traverse(T)*:

1. Output roten til T
2. **If** T ikke er et blad **then**

Pre-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *polsk prefiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *pre-order_traverse(T)*:

1. Output roten til T
2. **If** T ikke er et blad **then**
   2.1. *pre-order_traverse(venstre deltre av T)*

Pre-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *polsk prefiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

Algoritme *pre-order_traverse(T)*:

1. Output roten til T
2. **If** T ikke er et blad **then**
   2.1. *pre-order_traverse(venstre deltre av T)*
3. **If** T ikke er et blad **then**

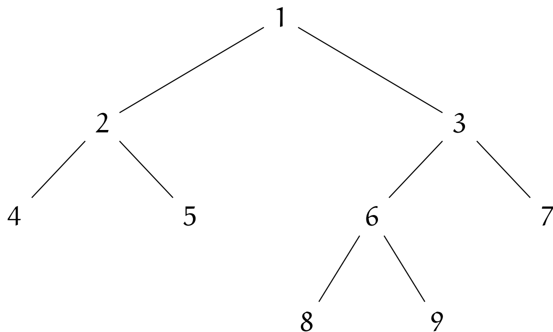
Pre-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *polsk prefiks* notasjon hvis input er et syntakstre.

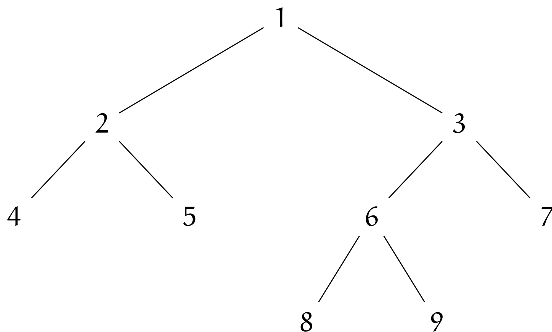
Algoritme *pre-order_traverse*(T):

1. Output roten til T
2. **If** T ikke er et blad **then**
   2.1. *pre-order_traverse(venstre deltre av* T*)*
3. **If** T ikke er et blad **then**
   3.1. *pre-order_traverse(høyre deltre av* T*)*

Pre-order-traversering

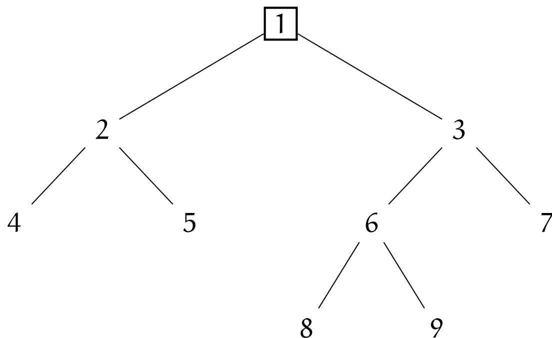


Pre-order-traversering



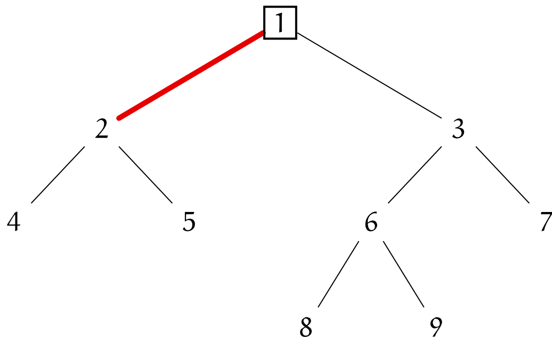
pre-order-traversering gir

Pre-order-traversering



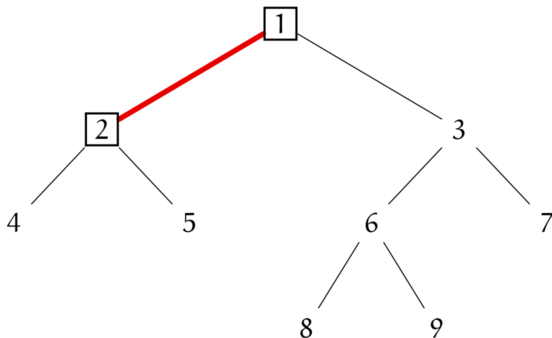
pre-order-traversering gir 1

Pre-order-traversering



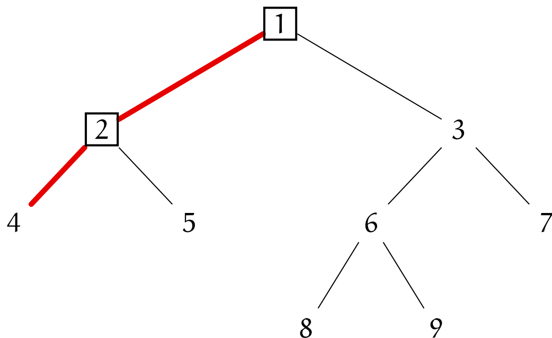
pre-order-traversering gir 1

Pre-order-traversering



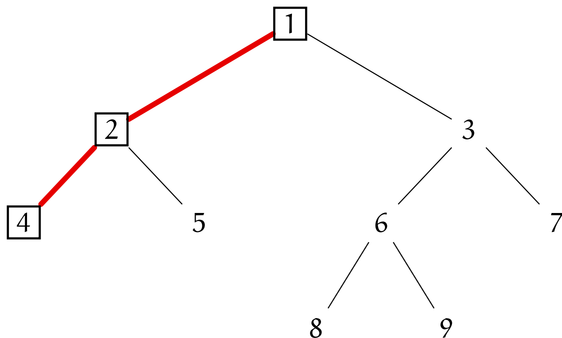
pre-order-traversering gir 1 2

Pre-order-traversering



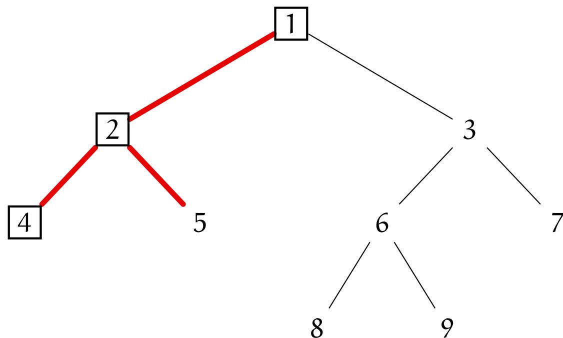
pre-order-traversering gir 1 2

Pre-order-traversering



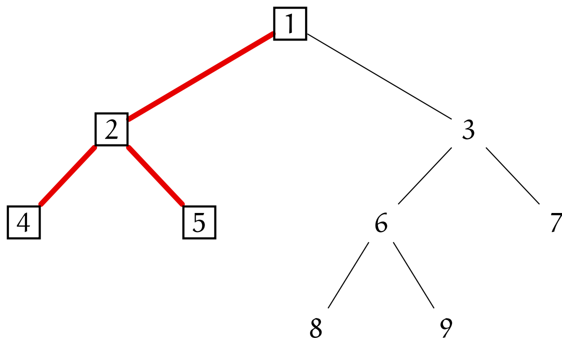
pre-order-traversering gir 1 2 4

Pre-order-traversering



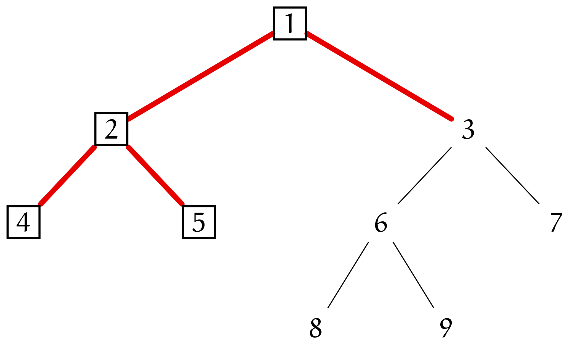
pre-order-traversering gir 1 2 4

Pre-order-traversering



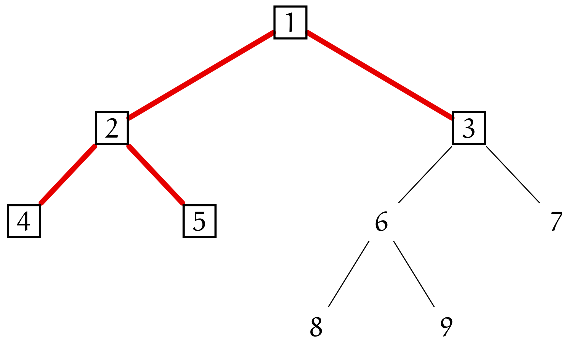
pre-order-traversering gir 1 2 4 5

Pre-order-traversering



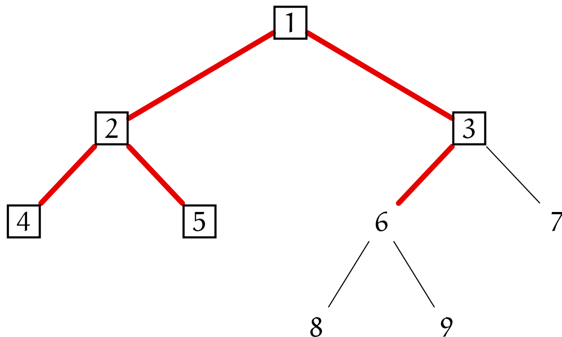
pre-order-traversering gir 1 2 4 5

Pre-order-traversering



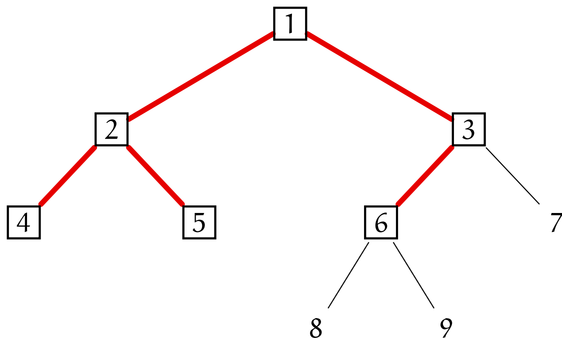
pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3

Pre-order-traversering



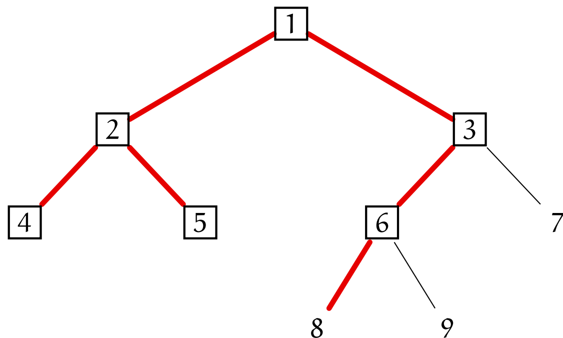
pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3

Pre-order-traversering



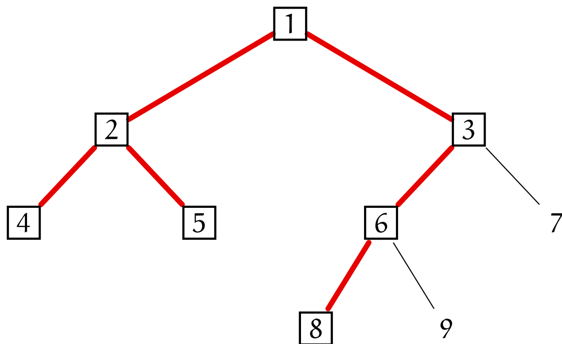
pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3 6

Pre-order-traversering



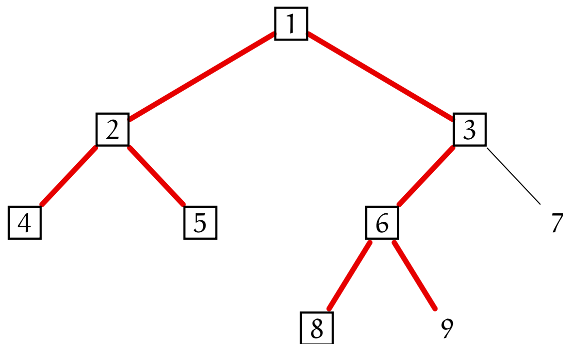
pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3 6

Pre-order-traversering



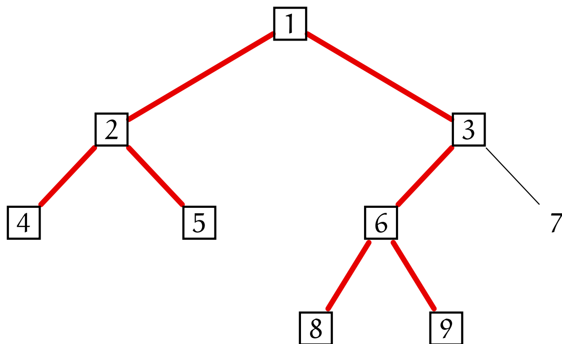
pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3 6 8

Pre-order-traversering



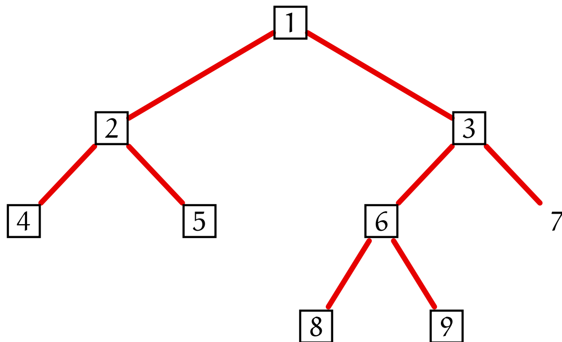
pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3 6 8

Pre-order-traversering



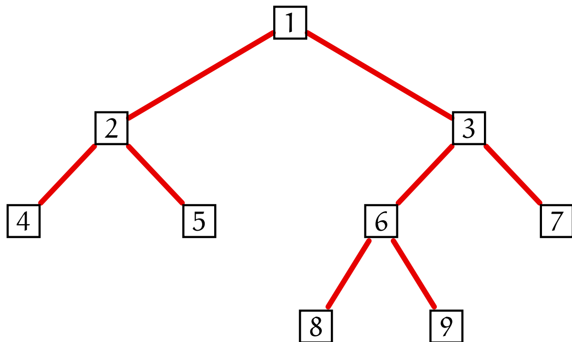
pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3 6 8 9

Pre-order-traversering



pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3 6 8 9

Pre-order-traversering



pre-order-traversering gir 1 2 4 5 3 6 8 9 7

Post-order-traversering

Post-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *baklengs polsk* notasjon, eller *postfiks* notasjon, hvis input er et syntakstre.

Post-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *baklengs polsk* notasjon, eller *postfiks* notasjon, hvis input er et syntakstre.

Algoritme *post-order_traverse*(T):

Post-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *baklengs polsk* notasjon, eller *postfiks* notasjon, hvis input er et syntakstre.

Algoritme *post-order_traverse(*T*)*:

1. **If** T ikke er et blad **then**

Post-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *baklengs polsk* notasjon, eller *postfiks* notasjon, hvis input er et syntakstre.

Algoritme *post-order_traverse(T)*:

1. **If** T ikke er et blad **then**
   1.1. *post-order_traverse(venstre deltre av T)*

Post-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *baklengs polsk* notasjon, eller *postfiks* notasjon, hvis input er et syntakstre.

Algoritme *post-order_traverse(*T*)*:

1. **If** T ikke er et blad **then**
   1.1. *post-order_traverse(venstre deltre av* T*)*
2. **If** T ikke er et blad **then**

Post-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *baklengs polsk* notasjon, eller *postfiks* notasjon, hvis input er et syntakstre.

Algoritme *post-order_traverse*(T):

1. **If** T ikke er et blad **then**
   1.1. *post-order_traverse(venstre deltre av* T*)*
2. **If** T ikke er et blad **then**
   2.1. *post-order_traverse(høyre deltre av* T*)*

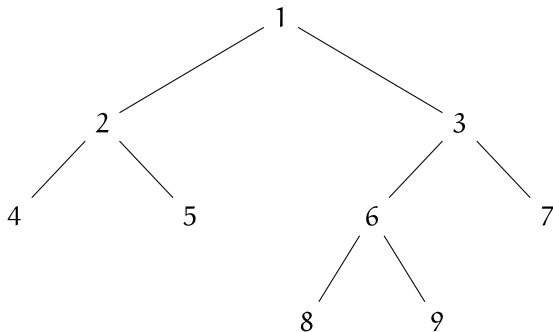
Post-order-traversering

- Her er algoritmen for den traverseringen som gir *baklengs polsk* notasjon, eller *postfiks* notasjon, hvis input er et syntakstre.

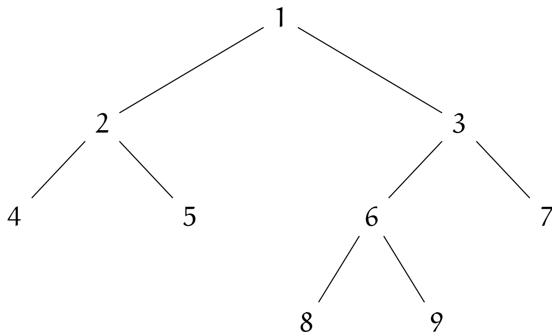
Algoritme *post-order_traverse(T)*:

1. **If** T ikke er et blad **then**
   1.1. *post-order_traverse(venstre deltre av T)*
2. **If** T ikke er et blad **then**
   2.1. *post-order_traverse(høyre deltre av T)*
3. Output roten til T

Post-order-traversering

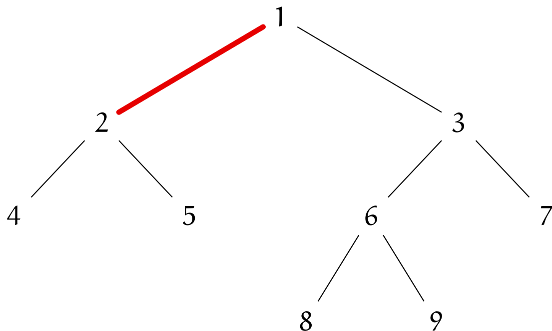


Post-order-traversering



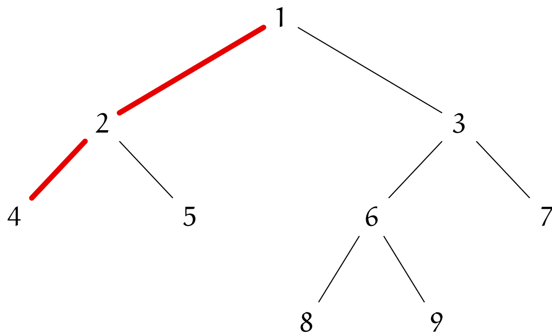
post-order-traversering gir

Post-order-traversering



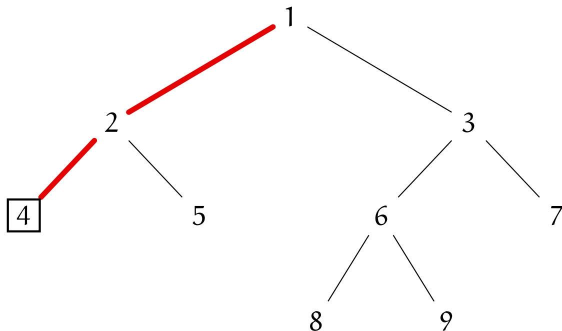
post-order-traversering gir

Post-order-traversering



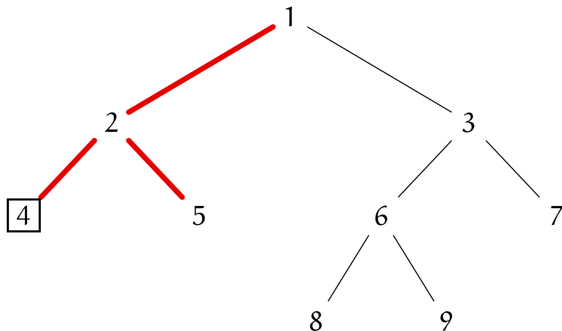
post-order-traversering gir

Post-order-traversering



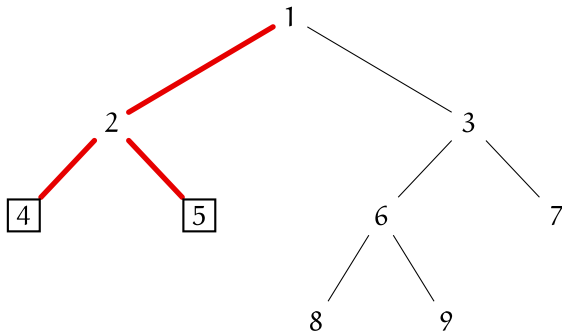
post-order-traversering gir 4

Post-order-traversering



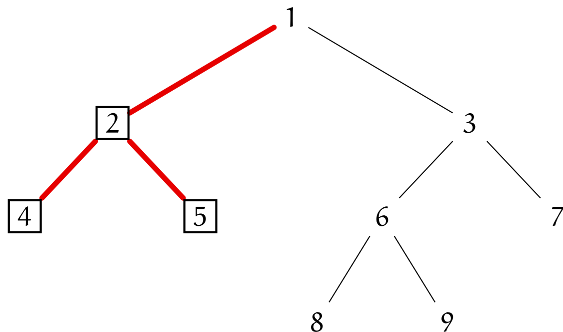
post-order-traversering gir 4

Post-order-traversering



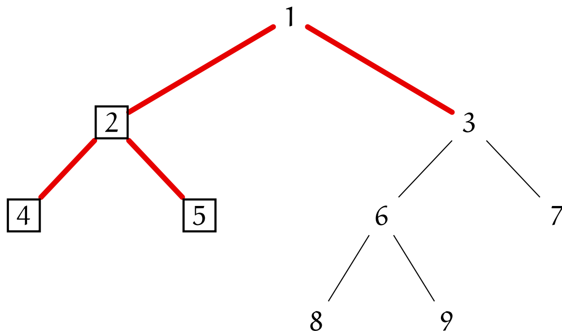
post-order-traversering gir 4 5

Post-order-traversering



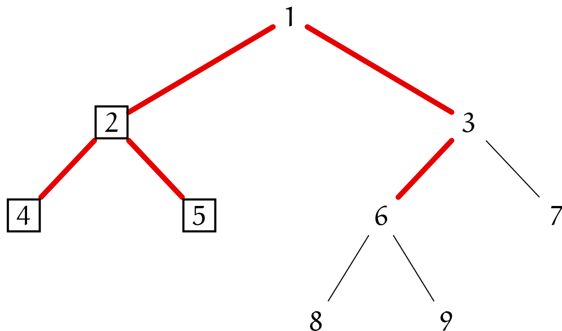
post-order-traversering gir 4 5 2

Post-order-traversering



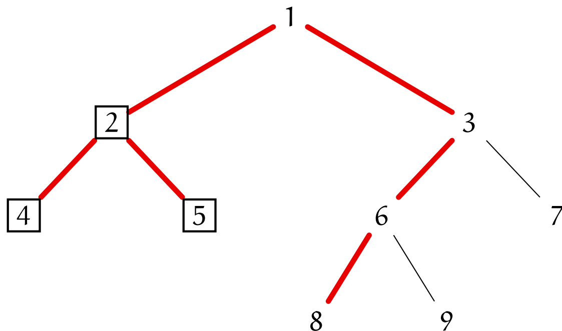
post-order-traversering gir 4 5 2

Post-order-traversering



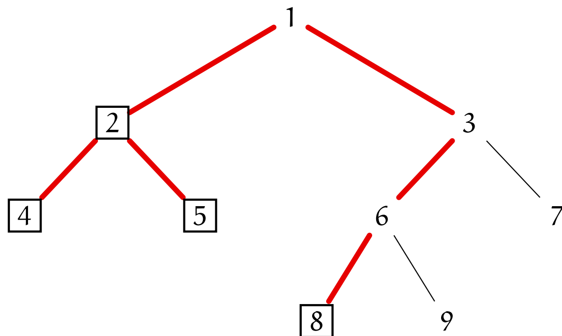
post-order-traversering gir 4 5 2

Post-order-traversering



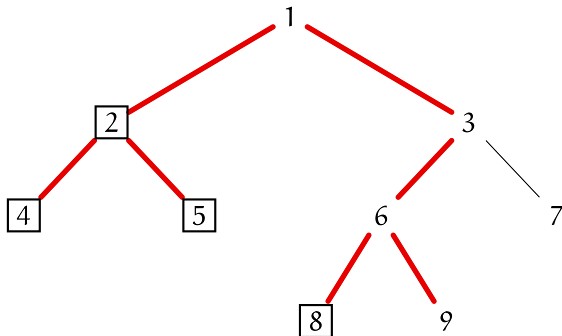
post-order-traversering gir 4 5 2

Post-order-traversering



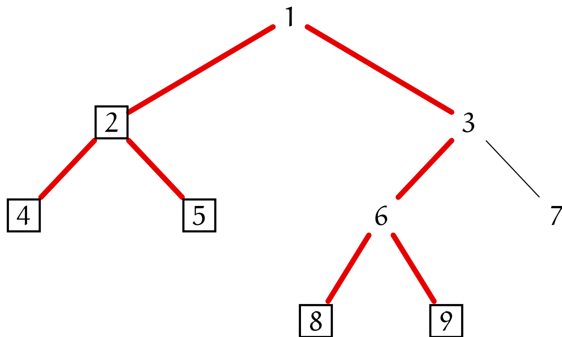
post-order-traversering gir 4 5 2 8

Post-order-traversering



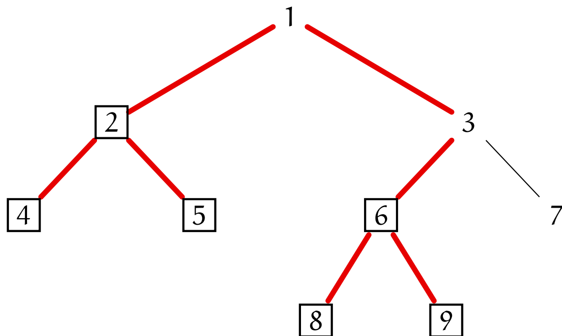
post-order-traversering gir 4 5 2 8

Post-order-traversering



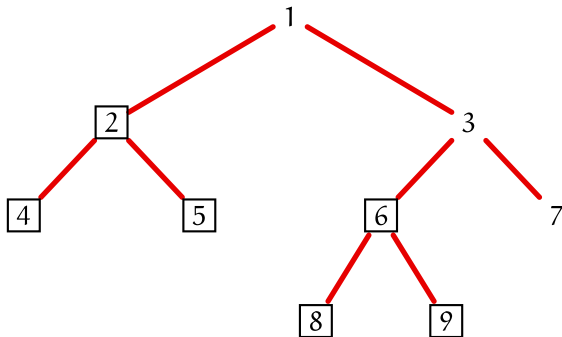
post-order-traversering gir 4 5 2 8 9

Post-order-traversering



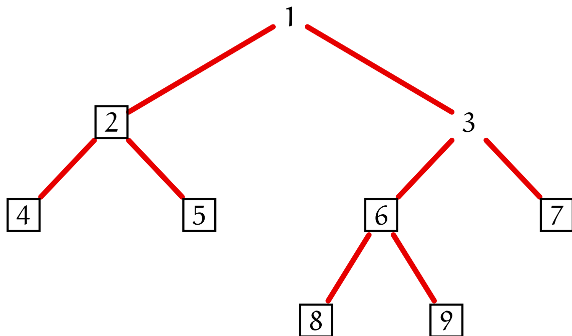
post-order-traversering gir 4 5 2 8 9 6

Post-order-traversering



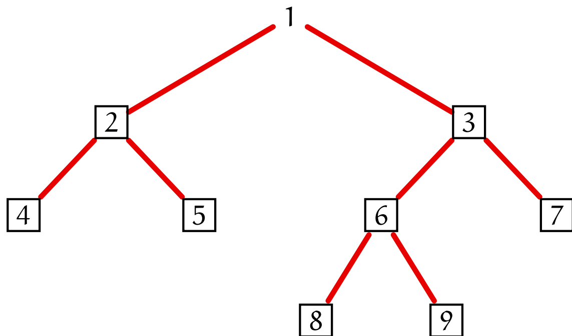
post-order-traversering gir 4 5 2 8 9 6

Post-order-traversering



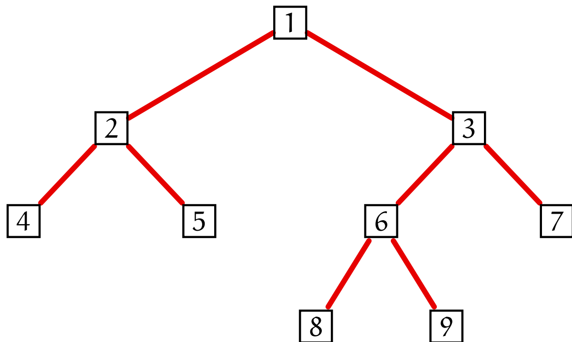
post-order-traversering gir 4 5 2 8 9 6 7

Post-order-traversering



post-order-traversering gir 4 5 2 8 9 6 7 3

Post-order-traversering



post-order-traversering gir 4 5 2 8 9 6 7 3 1

Notasjon: infiks, prefiks, postfiks

Notasjon: infiks, prefiks, postfiks

- Når vi skriver utsagnslogiske eller algebraiske uttrykk, er vi vant til å skrive symbolene $\wedge, \vee, +, \cdot$, etc. *mellom* deluttrykkene.

Notasjon: infiks, prefiks, postfiks

- Når vi skriver utsagnslogiske eller algebraiske uttrykk, er vi vant til å skrive symbolene $\wedge, \vee, +, \cdot$, etc. *mellom* deluttrykkene.
- Denne skrivemåten er historisk betinget og kalles for infiks.

Notasjon: infiks, prefiks, postfiks

- Når vi skriver utsagnslogiske eller algebraiske uttrykk, er vi vant til å skrive symbolene $\wedge, \vee, +, \cdot$, etc. *mellom* deluttrykkene.
- Denne skrivemåten er historisk betinget og kalles for infiks.
- Fordelen med forlengs og baklengs polsk notasjon, eller *prefiks* og *postfiks*, er at man slipper parenteser.

Notasjon: infiks, prefiks, postfiks

- Når vi skriver utsagnslogiske eller algebraiske uttrykk, er vi vant til å skrive symbolene $\wedge, \vee, +, \cdot$, etc. *mellom* deluttrykkene.
- Denne skrivemåten er historisk betinget og kalles for infiks.
- Fordelen med forlengs og baklengs polsk notasjon, eller *prefiks* og *postfiks*, er at man slipper parenteser.
- Disse kan være bedre egnet for innmating i algoritmer.

Notasjon: infiks, prefiks, postfiks

- Når vi skriver utsagnslogiske eller algebraiske uttrykk, er vi vant til å skrive symbolene $\wedge, \vee, +, \cdot$, etc. *mellom* deluttrykkene.
- Denne skrivemåten er historisk betinget og kalles for infiks.
- Fordelen med forlengs og baklengs polsk notasjon, eller *prefiks* og *postfiks*, er at man slipper parenteser.
- Disse kan være bedre egnet for innmating i algoritmer.
- Programmeringsspråket *LISP* er basert på bruk av polsk notasjon, og i "gamle dager" måtte lommeregnere programmeres med baklengs polsk notasjon.

Notasjon: infiks, prefiks, postfiks

- Når vi skriver utsagnslogiske eller algebraiske uttrykk, er vi vant til å skrive symbolene $\wedge, \vee, +, \cdot$, etc. *mellom* deluttrykkene.
- Denne skrivemåten er historisk betinget og kalles for infiks.
- Fordelen med forlengs og baklengs polsk notasjon, eller *prefiks* og *postfiks*, er at man slipper parenteser.
- Disse kan være bedre egnet for innmating i algoritmer.
- Programmeringsspråket *LISP* er basert på bruk av polsk notasjon, og i "gamle dager" måtte lommeregnere programmeres med baklengs polsk notasjon.
- Brukere av editoren *Emacs* vil oppdage at den innebygde kalkulatoren bruker baklengs polsk notasjon (RPN).

Eksempel

Eksempel

- Vi skal gi en grammatikk som definerer alle termer i symbolene 0, 1, $+$ og $\times$ i forlengs polsk, eller prefiks, notasjon.

Eksempel

- Vi skal gi en grammatikk som definerer alle termer i symbolene 0, 1, $+$ og $\times$ i forlengs polsk, eller prefiks, notasjon.
- En term er et uttrykk som beskriver et tall. Vi skal se på alle måter å beskrive tall på hvor vi bruker symbolene nevnt over.

Eksempel

- Vi skal gi en grammatikk som definerer alle termer i symbolene 0, 1, $+$ og $\times$ i forlengs polsk, eller prefiks, notasjon.
- En term er et uttrykk som beskriver et tall. Vi skal se på alle måter å beskrive tall på hvor vi bruker symbolene nevnt over.
- Poenget med polsk notasjon er at funksjonssymbol, logiske bindeord og andre symboler vi bruker til å binde sammen enkle uttrykk til mer komplekse settes først, og så kommer deluttrykkene etter, uten parenteser.

Eksempel

- Vi skal gi en grammatikk som definerer alle termer i symbolene 0, 1, $+$ og $\times$ i forlengs polsk, eller prefiks, notasjon.
- En term er et uttrykk som beskriver et tall. Vi skal se på alle måter å beskrive tall på hvor vi bruker symbolene nevnt over.
- Poenget med polsk notasjon er at funksjonssymbol, logiske bindeord og andre symboler vi bruker til å binde sammen enkle uttrykk til mer komplekse settes først, og så kommer deluttrykkene etter, uten parenteser.
- En grammatikk er et sett regler som forteller oss hvilke ord som tilhører det formelle språket vi vil beskrive.

Eksempel

- Vi skal gi en grammatikk som definerer alle termer i symbolene 0, 1, $+$ og $\times$ i forlengs polsk, eller prefiks, notasjon.
- En term er et uttrykk som beskriver et tall. Vi skal se på alle måter å beskrive tall på hvor vi bruker symbolene nevnt over.
- Poenget med polsk notasjon er at funksjonssymbol, logiske bindeord og andre symboler vi bruker til å binde sammen enkle uttrykk til mer komplekse settes først, og så kommer deluttrykkene etter, uten parenteser.
- En grammatikk er et sett regler som forteller oss hvilke ord som tilhører det formelle språket vi vil beskrive.
- I informatikk-litteratur har man utviklet en rask skrivemåte for slike grammatikker.

Eksempel

- Vi skal gi en grammatikk som definerer alle termer i symbolene 0, 1, $+$ og $\times$ i forlengs polsk, eller prefiks, notasjon.
- En term er et uttrykk som beskriver et tall. Vi skal se på alle måter å beskrive tall på hvor vi bruker symbolene nevnt over.
- Poenget med polsk notasjon er at funksjonssymbol, logiske bindeord og andre symboler vi bruker til å binde sammen enkle uttrykk til mer komplekse settes først, og så kommer deluttrykkene etter, uten parenteser.
- En grammatikk er et sett regler som forteller oss hvilke ord som tilhører det formelle språket vi vil beskrive.
- I informatikk-litteratur har man utviklet en rask skrivemåte for slike grammatikker.

  Term t

Eksempel

- Vi skal gi en grammatikk som definerer alle termer i symbolene 0, 1, $+$ og $\times$ i forlengs polsk, eller prefiks, notasjon.
- En term er et uttrykk som beskriver et tall. Vi skal se på alle måter å beskrive tall på hvor vi bruker symbolene nevnt over.
- Poenget med polsk notasjon er at funksjonssymbol, logiske bindeord og andre symboler vi bruker til å binde sammen enkle uttrykk til mer komplekse settes først, og så kommer deluttrykkene etter, uten parenteser.
- En grammatikk er et sett regler som forteller oss hvilke ord som tilhører det formelle språket vi vil beskrive.
- I informatikk-litteratur har man utviklet en rask skrivemåte for slike grammatikker.

  Term t

  $t ::= 0 \mid 1 \mid +tt \mid \times tt$

Eksempel

Eksempel

- Denne definisjonen skal leses som følger:

Eksempel

- Denne definisjonen skal leses som følger:
- Mengden av *termer* er den minste mengden som oppfyller

Eksempel

- Denne definisjonen skal leses som følger:
- Mengden av *termer* er den minste mengden som oppfyller
    - 0 og 1 er termer.

Eksempel

- Denne definisjonen skal leses som følger:
- Mengden av *termer* er den minste mengden som oppfyller
  - 0 og 1 er termer.
  - Hvis t og s er termer, er $+ts$ og $\times ts$ også termer.

Eksempel

- Denne definisjonen skal leses som følger:
- Mengden av *termer* er den minste mengden som oppfyller
  - 0 og 1 er termer.
  - Hvis t og s er termer, er $+ts$ og $\times ts$ også termer.
- Vi har sett på tilsvarende konstruksjoner da vi så på formelle språk definert ved generell induksjon.

Eksempel

- Denne definisjonen skal leses som følger:
- Mengden av *termer* er den minste mengden som oppfyller
  - 0 og 1 er termer.
  - Hvis t og s er termer, er $+ts$ og $\times ts$ også termer.
- Vi har sett på tilsvarende konstruksjoner da vi så på formelle språk definert ved generell induksjon.
- En induktiv definisjon forteller oss at det ligger en *trestruktur* bak hvert ord i språket.

Eksempel

- Denne definisjonen skal leses som følger:
- Mengden av *termer* er den minste mengden som oppfyller
  - 0 og 1 er termer.
  - Hvis t og s er termer, er $+ts$ og $\times ts$ også termer.
- Vi har sett på tilsvarende konstruksjoner da vi så på formelle språk definert ved generell induksjon.
- En induktiv definisjon forteller oss at det ligger en *trestruktur* bak hvert ord i språket.
- Hvordan kan vi bruke trær til å bestemme om et ord i alfabetet $\{0, 1, +, \times\}$ er en term eller ikke,

Eksempel

- Denne definisjonen skal leses som følger:
- Mengden av *termer* er den minste mengden som oppfyller
  - 0 og 1 er termer.
  - Hvis t og s er termer, er $+ts$ og $\times ts$ også termer.
- Vi har sett på tilsvarende konstruksjoner da vi så på formelle språk definert ved generell induksjon.
- En induktiv definisjon forteller oss at det ligger en *trestruktur* bak hvert ord i språket.
- Hvordan kan vi bruke trær til å bestemme om et ord i alfabetet $\{0, 1, +, \times\}$ er en term eller ikke,

  og hvordan kan vi bruke trær til å finne en mer lesbar form av termen?

Eksempel

Eksempel

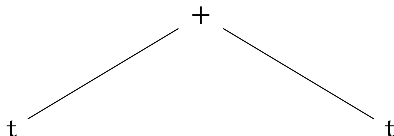
- Er $+ \times 00 \times +100$ en term slik det ble definert på forrige side?

Eksempel

- Er $+ \times 00 \times +100$ en term slik det ble definert på forrige side?
- Vi kan prøve å utvikle et syntakstre for dette ordet, hvor vi bruker bokstaven t for å markere at her må det stå en enklere term.

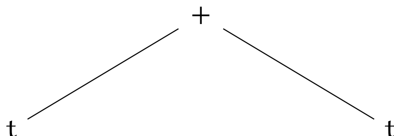
Eksempel

- Er $+\times 00 \times +100$ en term slik det ble definert på forrige side?
- Vi kan prøve å utvikle et syntakstre for dette ordet, hvor vi bruker bokstaven t for å markere at her må det stå en enklere term.
- Første tilnærming til syntakstreet må være



Eksempel

- Er $+\times 00\times +100$ en term slik det ble definert på forrige side?
- Vi kan prøve å utvikle et syntakstre for dette ordet, hvor vi bruker bokstaven t for å markere at her må det stå en enklere term.
- Første tilnærming til syntakstreet må være



hvor $\mathrm{tt} = \times 00\times +100$

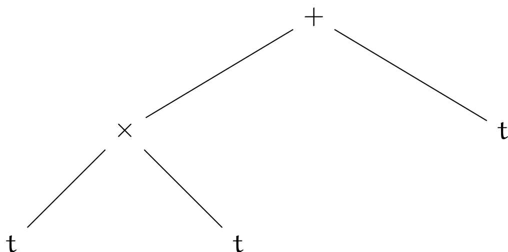
Eksempel

Eksempel

- Den første ukjente termen må begynne med $\times$, så syntakstreet må se ut som

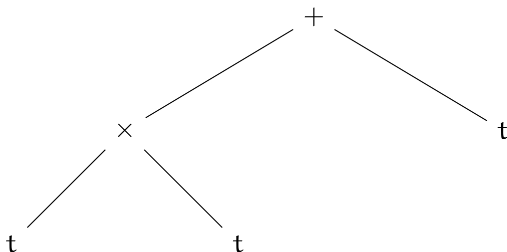
Eksempel

- Den første ukjente termen må begynne med $\times$, så syntakstreet må se ut som



Eksempel

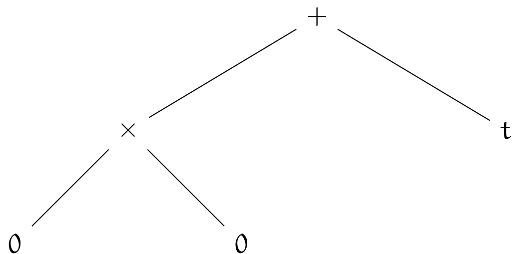
- Den første ukjente termen må begynne med $\times$, så syntakstreet må se ut som



hvor $\mathtt{ttt} = 00 \times +100$. Her kan vi se direkte hva de tre $\mathtt{t}$-ene må stå for, så vi får treet

Eksempel

Eksempel



hvor $t = \times + 100$.

Eksempel

Eksempel

- Vi kan fortsette å avsløre hvordan syntakstreet må se ut ved å lese problemordet vårt fra venstre mot høyre.

Eksempel

- Vi kan fortsette å avsløre hvordan syntakstreet må se ut ved å lese problemordet vårt fra venstre mot høyre.
- Vi ser at neste term er et produkt hvor første faktor er summen av 1 og 0 og andre faktor er 0

Eksempel

- Vi kan fortsette å avsløre hvordan syntakstreet må se ut ved å lese problemordet vårt fra venstre mot høyre.
- Vi ser at neste term er et produkt hvor første faktor er summen av 1 og 0 og andre faktor er 0

  (Vi er ikke interessert i verdien av denne termen, bare om det er en term).

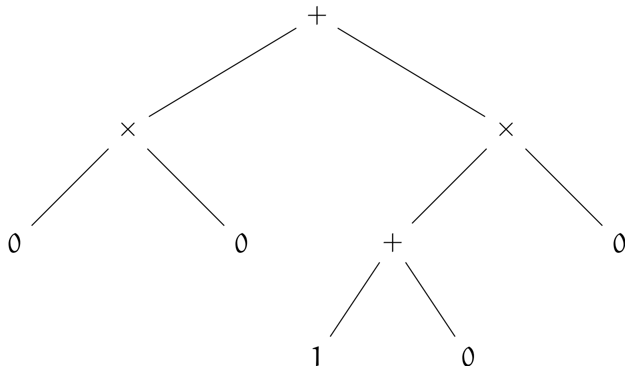
Eksempel

- Vi kan fortsette å avsløre hvordan syntakstreet må se ut ved å lese problemordet vårt fra venstre mot høyre.
- Vi ser at neste term er et produkt hvor første faktor er summen av 1 og 0 og andre faktor er 0

  (Vi er ikke interessert i verdien av denne termen, bare om det er en term).
- Det gir oss følgende fullstendige syntakstre.

Eksempel

Eksempel



Skrevet på vanlig infiks-form får vi

$$(0 \times 0) + ((1 + 0) \times 0).$$

Mer om notasjon

Mer om notasjon

- Når man bruker baklengs polsk notasjon på en lommeregner, taster man inn tall og funksjonsuttrykk som $+$, exp, sin i rekkefølge.

Mer om notasjon

- Når man bruker baklengs polsk notasjon på en lommeregner, taster man inn tall og funksjonsuttrykk som $+$, exp, sin i rekkefølge.
- Hver gang man taster inn et funksjonsuttrykk, vil lommeregneren oppfatte siste tall, eller de to siste tallene, som input, og erstatte disse med funksjonsverdien.

Mer om notasjon

- Når man bruker baklengs polsk notasjon på en lommeregner, taster man inn tall og funksjonsuttrykk som $+$, exp, sin i rekkefølge.
- Hver gang man taster inn et funksjonsuttrykk, vil lommeregneren oppfatte siste tall, eller de to siste tallene, som input, og erstatte disse med funksjonsverdien.
- Det er altså funksjonsverdien som oppfattes som det siste tallet du tastet inn i fortsettelsen.

Mer om notasjon

- Når man bruker baklengs polsk notasjon på en lommeregner, taster man inn tall og funksjonsuttrykk som $+$, exp, sin i rekkefølge.
- Hver gang man taster inn et funksjonsuttrykk, vil lommeregneren oppfatte siste tall, eller de to siste tallene, som input, og erstatte disse med funksjonsverdien.
- Det er altså funksjonsverdien som oppfattes som det siste tallet du tastet inn i fortsettelsen.
- Det er ikke vanskelig å se at lommeregneren kan behandle en sekvens av tall og funksjoner på bare en måte. Det betyr at et uttrykk i baklengs polsk notasjon bare kan tolkes på en måte.

Mer om notasjon

- Når man bruker baklengs polsk notasjon på en lommeregner, taster man inn tall og funksjonsuttrykk som $+$, exp, sin i rekkefølge.
- Hver gang man taster inn et funksjonsuttrykk, vil lommeregneren oppfatte siste tall, eller de to siste tallene, som input, og erstatte disse med funksjonsverdien.
- Det er altså funksjonsverdien som oppfattes som det siste tallet du tastet inn i fortsettelsen.
- Det er ikke vanskelig å se at lommeregneren kan behandle en sekvens av tall og funksjoner på bare en måte. Det betyr at et uttrykk i baklengs polsk notasjon bare kan tolkes på en måte.
- Det samme gjelder da selvfølgelig for forlengs polsk notasjon.

Mer om notasjon

Mer om notasjon

- Syntakstreet for en term eller et utsagnslogisk uttrykk er uavhengig av om vi har brukt vanlig infiks notasjon, forlengs polsk eller baklengs polsk notasjon.

Mer om notasjon

- Syntakstreet for en term eller et utsagnslogisk uttrykk er uavhengig av om vi har brukt vanlig infiks notasjon, forlengs polsk eller baklengs polsk notasjon.
- Når syntakstreet er gitt, så kan disse uttrykkene gjenskapes ved hjelp av de ulike traverseringsalgoritmene.

Mer om notasjon

- Syntakstreet for en term eller et utsagnslogisk uttrykk er uavhengig av om vi har brukt vanlig infiks notasjon, forlengs polsk eller baklengs polsk notasjon.
- Når syntakstreet er gitt, så kan disse uttrykkene gjenskapes ved hjelp av de ulike traverseringsalgoritmene.
- Det er enkelt å lage en algoritme som tar et uttrykk, sjekker om det er korrekt og som eventuelt gir syntakstreet som output.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Mengden av binære trær kan også defineres *induktivt*.

Induksjon og rekursjon for binære trær

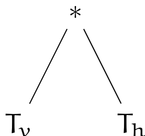
- Mengden av binære trær kan også defineres *induktivt*.
- Utgangspunktet, eller *induksjonstarten*, blir nulltreet, treet som består av en node og ingen kanter.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Mengden av binære trær kan også defineres *induktivt*.
- Utgangspunktet, eller *induksjonstarten*, blir nulltreet, treet som består av en node og ingen kanter.
- Denne noden er da både *rot* og *blad*.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Mengden av binære trær kan også defineres *induktivt*.
- Utgangspunktet, eller *induksjonstarten*, blir nulltreet, treet som består av en node og ingen kanter.
- Denne noden er da både *rot* og *blad*.
- *Induksjonskrittet* består i at vi tar to binære trær T_v og T_h, en ny rotnode og to nye kanter, mot venstre til roten i T_v og til høyre mot roten i T_h.



Sammensetning av to binære trær til ett.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Vi kan oppfatte denne sammensetningen som en form for *sum* av to binære trær: vi legger sammen to trær og får et nytt tre.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Vi kan oppfatte denne sammensetningen som en form for *sum* av to binære trær: vi legger sammen to trær og får et nytt tre.
- Vi kan godt skrive $T_v \oplus T_h$ for denne sammensetningen av trær.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Vi kan oppfatte denne sammensetningen som en form for *sum* av to binære trær: vi legger sammen to trær og får et nytt tre.
- Vi kan godt skrive $T_v \oplus T_h$ for denne sammensetningen av trær.
- Merk at den kommutative loven ($x \oplus y = y \oplus x$) ikke gjelder; det er essensielt hvilket av trærne som settes til venstre og hvilket som settes til høyre.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Vi kan oppfatte denne sammensetningen som en form for *sum* av to binære trær: vi legger sammen to trær og får et nytt tre.
- Vi kan godt skrive $T_v \oplus T_h$ for denne sammensetningen av trær.
- Merk at den kommutative loven ($x \oplus y = y \oplus x$) ikke gjelder; det er essensielt hvilket av trærne som settes til venstre og hvilket som settes til høyre.
- Som grafer betyr det ikke så mye, men for trerekursjon er det viktig, siden vi der kan referere til venstre og høyre deltre.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Vi kan oppfatte denne sammensetningen som en form for *sum* av to binære trær: vi legger sammen to trær og får et nytt tre.
- Vi kan godt skrive $T_v \oplus T_h$ for denne sammensetningen av trær.
- Merk at den kommutative loven ($x \oplus y = y \oplus x$) ikke gjelder; det er essensielt hvilket av trærne som settes til venstre og hvilket som settes til høyre.
- Som grafer betyr det ikke så mye, men for trerekursjon er det viktig, siden vi der kan referere til venstre og høyre deltre.
- Vi skal nå se på en form for produkt av trær.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Vi kan oppfatte denne sammensetningen som en form for *sum* av to binære trær: vi legger sammen to trær og får et nytt tre.
- Vi kan godt skrive $T_v \oplus T_h$ for denne sammensetningen av trær.
- Merk at den kommutative loven ($x \oplus y = y \oplus x$) ikke gjelder; det er essensielt hvilket av trærne som settes til venstre og hvilket som settes til høyre.
- Som grafer betyr det ikke så mye, men for trerekursjon er det viktig, siden vi der kan referere til venstre og høyre deltre.
- Vi skal nå se på en form for produkt av trær.
- Vi skriver $*$ for nulltreet.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

- $* \otimes S = S$

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

- $* \otimes S = S$
- $(T_v \oplus T_h) \otimes S = (T_v \otimes S) \oplus (T_h \otimes S)$

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

- $* \otimes S = S$
- $(T_v \oplus T_h) \otimes S = (T_v \otimes S) \oplus (T_h \otimes S)$

- Poenget med å gi denne definisjonen er å gi et eksempel på hvordan man kan definere ting ved rekursjon på oppbyggingen av et tre.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

- $* \otimes S = S$
- $(T_v \oplus T_h) \otimes S = (T_v \otimes S) \oplus (T_h \otimes S)$

- Poenget med å gi denne definisjonen er å gi et eksempel på hvordan man kan definere ting ved rekursjon på oppbyggingen av et tre.
  - Vi illustrerer hva som skjer ved et par eksempler på tavla.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

- $* \otimes S = S$
- $(T_v \oplus T_h) \otimes S = (T_v \otimes S) \oplus (T_h \otimes S)$

- Poenget med å gi denne definisjonen er å gi et eksempel på hvordan man kan definere ting ved rekursjon på oppbyggingen av et tre.
  - Vi illustrerer hva som skjer ved et par eksempler på tavla.
  - Vi ser at effekten er å erstatte alle bladnodene i T med kopier av S.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

- $* \otimes S = S$
- $(T_v \oplus T_h) \otimes S = (T_v \otimes S) \oplus (T_h \otimes S)$

- Poenget med å gi denne definisjonen er å gi et eksempel på hvordan man kan definere ting ved rekursjon på oppbyggingen av et tre.
  - Vi illustrerer hva som skjer ved et par eksempler på tavla.
  - Vi ser at effekten er å erstatte alle bladnodene i T med kopier av S.
- Generelt kan vi definere en funksjon f ved rekursjon over oppbyggingen av binære trær ved følgende.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

- $* \otimes S = S$
- $(T_v \oplus T_h) \otimes S = (T_v \otimes S) \oplus (T_h \otimes S)$

- Poenget med å gi denne definisjonen er å gi et eksempel på hvordan man kan definere ting ved rekursjon på oppbyggingen av et tre.
  - Vi illustrerer hva som skjer ved et par eksempler på tavla.
  - Vi ser at effekten er å erstatte alle bladnodene i T med kopier av S.
- Generelt kan vi definere en funksjon f ved rekursjon over oppbyggingen av binære trær ved følgende.
  1. Bestemme hva $f(*)$ er, når $*$ er nulltreet.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Definisjon

Vi definerer "treproduktet" $\otimes$ ved

- $* \otimes S = S$
- $(T_v \oplus T_h) \otimes S = (T_v \otimes S) \oplus (T_h \otimes S)$

- Poenget med å gi denne definisjonen er å gi et eksempel på hvordan man kan definere ting ved rekursjon på oppbyggingen av et tre.
  - Vi illustrerer hva som skjer ved et par eksempler på tavla.
  - Vi ser at effekten er å erstatte alle bladnodene i T med kopier av S.
- Generelt kan vi definere en funksjon f ved rekursjon over oppbyggingen av binære trær ved følgende.
  1. Bestemme hva $f(*)$ er, når $*$ er nulltreet.
  2. Bestemme hvordan $f(T)$ avhenger av de to deltrærne $f(T_v)$ og $f(T_h)$, når T er et sammensatt tre.

Induksjon og rekursjon for binære trær

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Hvis vi går tilbake til syntakstrær, så kan vi se hvordan de tre ulike notasjonsformene kan defineres via trerekursjon.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Hvis vi går tilbake til syntakstrær, så kan vi se hvordan de tre ulike notasjonsformene kan defineres via trerekursjon.
- De tre algoritmene svarer til hver sin rekursive funksjon.

Induksjon og rekursjon for binære trær

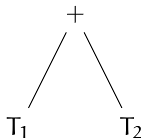
- Hvis vi går tilbake til syntakstrær, så kan vi se hvordan de tre ulike notasjonsformene kan defineres via trerekursjon.
- De tre algoritmene svarer til hver sin rekursive funksjon.
- Vi definerer funksjonen `infiks` ved trerekursjon på følgende måte.

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Hvis vi går tilbake til syntakstrær, så kan vi se hvordan de tre ulike notasjonsformene kan defineres via trerekursjon.
- De tre algoritmene svarer til hver sin rekursive funksjon.
- Vi definerer funksjonen $\mathtt{infiks}$ ved trerekursjon på følgende måte.
  - Hvis roten i T er en bladnode med merke a, så lar vi $\mathtt{infiks}(T) = a$.

Induksjon og rekursjon for binære trær

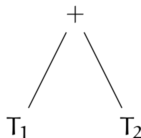
- Hvis vi går tilbake til syntakstrær, så kan vi se hvordan de tre ulike notasjonsformene kan defineres via trerekursjon.
- De tre algoritmene svarer til hver sin rekursive funksjon.
- Vi definerer funksjonen $\mathtt{infiks}$ ved trerekursjon på følgende måte.
  - Hvis roten i T er en bladnode med merke a, så lar vi $\mathtt{infiks}(T) = a$.
  - Hvis T er på formen



lar vi $\mathtt{infiks}(T) = (\mathtt{infiks}(T_1) + \mathtt{infiks}(T_2))$.

Induksjon og rekursjon for binære trær

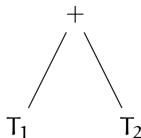
- Hvis vi går tilbake til syntakstrær, så kan vi se hvordan de tre ulike notasjonsformene kan defineres via trerekursjon.
- De tre algoritmene svarer til hver sin rekursive funksjon.
- Vi definerer funksjonen $\mathtt{infiks}$ ved trerekursjon på følgende måte.
  - Hvis roten i T er en bladnode med merke a, så lar vi $\mathtt{infiks}(T) = a$.
  - Hvis T er på formen



  lar vi $\mathtt{infiks}(T) = (\mathtt{infiks}(T_1) + \mathtt{infiks}(T_2))$.
- De to andre funksjonene er definert på samme måte for bladnoder, og på følgende måte for sammensatte trær.

Induksjon og rekursjon for binære trær

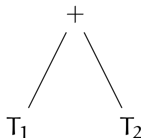
- Hvis vi går tilbake til syntakstrær, så kan vi se hvordan de tre ulike notasjonsformene kan defineres via trerekursjon.
- De tre algoritmene svarer til hver sin rekursive funksjon.
- Vi definerer funksjonen $\mathtt{infiks}$ ved trerekursjon på følgende måte.
  - Hvis roten i T er en bladnode med merke a, så lar vi $\mathtt{infiks}(T) = a$.
  - Hvis T er på formen



  lar vi $\mathtt{infiks}(T) = (\mathtt{infiks}(T_1) + \mathtt{infiks}(T_2))$.
- De to andre funksjonene er definert på samme måte for bladnoder, og på følgende måte for sammensatte trær.
  - $\mathtt{prefiks}(T) = +\mathtt{prefiks}(T_1)\mathtt{prefiks}(T_2)$

Induksjon og rekursjon for binære trær

- Hvis vi går tilbake til syntakstrær, så kan vi se hvordan de tre ulike notasjonsformene kan defineres via trerekursjon.
- De tre algoritmene svarer til hver sin rekursive funksjon.
- Vi definerer funksjonen $\mathtt{infiks}$ ved trerekursjon på følgende måte.
  - Hvis roten i T er en bladnode med merke a, så lar vi $\mathtt{infiks}(T) = a$.
  - Hvis T er på formen



lar vi $\mathtt{infiks}(T) = (\mathtt{infiks}(T_1) + \mathtt{infiks}(T_2))$.

- De to andre funksjonene er definert på samme måte for bladnoder, og på følgende måte for sammensatte trær.
  - $\mathtt{prefiks}(T) = +\mathtt{prefiks}(T_1)\mathtt{prefiks}(T_2)$
  - $\mathtt{postfiks}(T) = \mathtt{postfiks}(T_1)\mathtt{postfiks}(T_2)+$

Bitsekvenser og binære trær

Bitsekvenser og binære trær

- Det er en intim sammenheng mellom bitsekvenser og binære trær.

Bitsekvenser og binære trær

- Det er en intim sammenheng mellom bitsekvenser og binære trær.
- For hver node i et binært tre kan vi lage oss en tilsvarende bitsekvens ved rekursjon på nivået (avstanden til roten) til noden.

Bitsekvenser og binære trær

- Det er en intim sammenheng mellom bitsekvenser og binære trær.
- For hver node i et binært tre kan vi lage oss en tilsvarende bitsekvens ved rekursjon på nivået (avstanden til roten) til noden.
- La $\mathtt{bit}(*)$ være den tomme sekvensen hvis $*$ er rotnoden.

Bitsekvenser og binære trær

- Det er en intim sammenheng mellom bitsekvenser og binære trær.
- For hver node i et binært tre kan vi lage oss en tilsvarende bitsekvens ved rekursjon på nivået (avstanden til roten) til noden.
- La $\mathtt{bit}(*)$ være den tomme sekvensen hvis $*$ er rotnoden.
- Hvis a er en node med to barn, b til venstre og c til høyre, og $\mathtt{bit}(a) = x_1 \cdots x_k$, lar vi

Bitsekvenser og binære trær

- Det er en intim sammenheng mellom bitsekvenser og binære trær.
- For hver node i et binært tre kan vi lage oss en tilsvarende bitsekvens ved rekursjon på nivået (avstanden til roten) til noden.
- La $\mathtt{bit}(*)$ være den tomme sekvensen hvis $*$ er rotnoden.
- Hvis a er en node med to barn, b til venstre og c til høyre, og $\mathtt{bit}(a) = x_1 \cdots x_k$, lar vi
  - $\mathtt{bit}(b) = x_1 \cdots x_k 0$.

Bitsekvenser og binære trær

- Det er en intim sammenheng mellom bitsekvenser og binære trær.
- For hver node i et binært tre kan vi lage oss en tilsvarende bitsekvens ved rekursjon på nivået (avstanden til roten) til noden.
- La $\mathtt{bit}(*)$ være den tomme sekvensen hvis $*$ er rotnoden.
- Hvis a er en node med to barn, b til venstre og c til høyre, og $\mathtt{bit}(a) = x_1 \cdots x_k$, lar vi
    - $\mathtt{bit}(b) = x_1 \cdots x_k 0$.
    - $\mathtt{bit}(c) = x_1 \cdots x_k 1$.

Bitsekvenser og binære trær

- Det er en intim sammenheng mellom bitsekvenser og binære trær.
- For hver node i et binært tre kan vi lage oss en tilsvarende bitsekvens ved rekursjon på nivået (avstanden til roten) til noden.
- La $\mathtt{bit}(*)$ være den tomme sekvensen hvis $*$ er rotnoden.
- Hvis a er en node med to barn, b til venstre og c til høyre, og $\mathtt{bit}(a) = x_1 \cdots x_k$, lar vi
  - $\mathtt{bit}(b) = x_1 \cdots x_k 0$.
  - $\mathtt{bit}(c) = x_1 \cdots x_k 1$.
- Denne definisjonen illustreres på tavla.

Bitsekvenser og binære trær

Bitsekvenser og binære trær

- Omvendt vil en endelig mengde X av bitsekvenser, eller 0-1-sekvenser, bestemme et binært tre hvor vi først ser på alle delsekvenser av sekvensene i X, så lar bladnodene være de minimale bitsekvensene som ikke er delsekvens av noen sekvens i X og til slutt organiserer dette til et tre ved å la den tomme sekvensen bli roten, og så gå til venstre eller høyre avhengig av om neste bit er 0 eller 1.

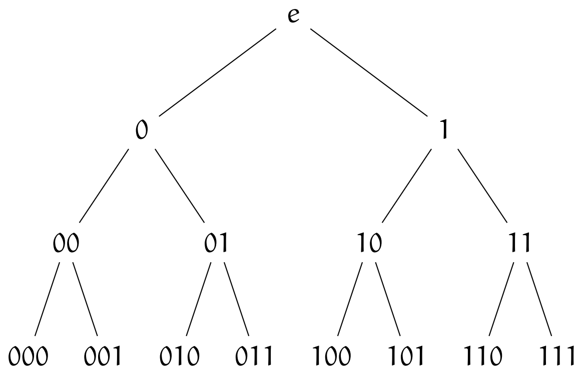
Bitsekvenser og binære trær

- Omvendt vil en endelig mengde X av bitsekvenser, eller 0-1-sekvenser, bestemme et binært tre hvor vi først ser på alle delsekvenser av sekvensene i X, så lar bladnodene være de minimale bitsekvensene som ikke er delsekvens av noen sekvens i X og til slutt organiserer dette til et tre ved å la den tomme sekvensen bli roten, og så gå til venstre eller høyre avhengig av om neste bit er 0 eller 1.
- Vi illustrerer denne konstruksjonen på tavla.

Bitsekvenser og binære trær

Bitsekvenser og binære trær

- Hvis vi markere nodene i et binært tre med bitsekvensene, så får vi følgende bilde.



Litt om strømmer

Litt om strømmer

- En digital strøm er en uendelig følge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hvor hver x_i er en bit, markert som 0 eller 1.

Litt om strømmer

- En digital strøm er en uendelig følge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hvor hver x_i er en bit, markert som 0 eller 1.
- En digital strøm kan oppfattes som en strøm av data på digital form.

Litt om strømmer

- En digital strøm er en uendelig følge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hvor hver x_i er en bit, markert som 0 eller 1.
- En digital strøm kan oppfattes som en strøm av data på digital form.
- Anta at vi har en prosedyre hvor input kan være en digital strøm og hvor output er en eller annen melding på digital form.

Litt om strømmer

- En digital strøm er en uendelig følge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hvor hver x_i er en bit, markert som 0 eller 1.
- En digital strøm kan oppfattes som en strøm av data på digital form.
- Anta at vi har en prosedyre hvor input kan være en digital strøm og hvor output er en eller annen melding på digital form.
- Det vil finnes situasjoner hvor vi aldri får noe output hvis input er spesielt ekle digitale strømmer, men normalt vil vi at prosedyren skal avsløre om den digitale strømmen vi mottar er uten interesse, og skal avslutte med en melding om det.

Litt om strømmer

Litt om strømmer

- Vi tenker oss altså en situasjon hvor prosedyren avslutter med et svar uansett hvilken strøm den fores med.

Litt om strømmer

- Vi tenker oss altså en situasjon hvor prosedyren avslutter med et svar uansett hvilken strøm den føres med.
- For enhver strøm finnes det da en endelig del som er stor nok til at prosedyren vår kan gi et output på grunnlag av denne.

Litt om strømmer

- Vi tenker oss altså en situasjon hvor prosedyren avslutter med et svar uansett hvilken strøm den føres med.
- For enhver strøm finnes det da en endelig del som er stor nok til at prosedyren vår kan gi et output på grunnlag av denne.
- Det er fordi prosedyren vår bare kan utnytte endelig mye informasjon om ver enkelt strøm.

Litt om strømmer

- Vi tenker oss altså en situasjon hvor prosedyren avslutter med et svar uansett hvilken strøm den fores med.
- For enhver strøm finnes det da en endelig del som er stor nok til at prosedyren vår kan gi et output på grunnlag av denne.
- Det er fordi prosedyren vår bare kan utnytte endelig mye informasjon om ver enkelt strøm.
- La T være treet av endelige bitsekvenser som er så små at prosedyren vår ikke har nok grunnlag i disse til å gi et output.

Litt om strømmer

- Vi tenker oss altså en situasjon hvor prosedyren avslutter med et svar uansett hvilken strøm den fores med.
- For enhver strøm finnes det da en endelig del som er stor nok til at prosedyren vår kan gi et output på grunnlag av denne.
- Det er fordi prosedyren vår bare kan utnytte endelig mye informasjon om ver enkelt strøm.
- La T være treet av endelige bitsekvenser som er så små at prosedyren vår ikke har nok grunnlag i disse til å gi et output.
- Er T et endelig tre?

Litt om strømmer

Litt om strømmer

- Vi skal vise at det er tilfelle.

Litt om strømmer

- Vi skal vise at det er tilfelle.
- Beviset er et eksempel på et kontrapositivt bevis, altså på et bevis hvor vi antar at konklusjonen er feil, og resonnerer oss frem til at da er premissene feil.

Litt om strømmer

- Vi skal vise at det er tilfelle.
- Beviset er et eksempel på et kontrapositivt bevis, altså på et bevis hvor vi antar at konklusjonen er feil, og resonnerer oss frem til at da er premissene feil.
- Anta derfor at treet er uendelig.

Litt om strømmer

- Vi skal vise at det er tilfelle.
- Beviset er et eksempel på et kontrapositivt bevis, altså på et bevis hvor vi antar at konklusjonen er feil, og resonnerer oss frem til at da er premissene feil.
- Anta derfor at treet er uendelig.
- Da må venstre deltre være uendelig eller høyre deltre være uendelig.

Litt om strømmer

- Vi skal vise at det er tilfelle.
- Beviset er et eksempel på et kontrapositivt bevis, altså på et bevis hvor vi antar at konklusjonen er feil, og resonnerer oss frem til at da er premissene feil.
- Anta derfor at treet er uendelig.
- Da må venstre deltre være uendelig eller høyre deltre være uendelig.
- Start en digital strøm med 0 om venstre deltre er uendelig og med 1 om det er endelig. La T_1 være det tilsvarende uendelige deltreet.

Litt om strømmer

- Vi skal vise at det er tilfelle.
- Beviset er et eksempel på et kontrapositivt bevis, altså på et bevis hvor vi antar at konklusjonen er feil, og resonnerer oss frem til at da er premissene feil.
- Anta derfor at treet er uendelig.
- Da må venstre deltre være uendelig eller høyre deltre være uendelig.
- Start en digital strøm med 0 om venstre deltre er uendelig og med 1 om det er endelig. La T_1 være det tilsvarende uendelige deltreet.
- Fortsett strømmen med 0 om venstre deltre i T_1 er uendelig og med 1 om det er endelig (da er høyre deltre i T_1 uendelig).

Litt om strømmer

Litt om strømmer

- Slik fortsetter vi ved å gå til venstre når deltreet i den retningen er uendelig, og til høyre når det er nødvendig for fortsatt å ha et uendelig deltre.

Litt om strømmer

- Slik fortsetter vi ved å gå til venstre når deltreet i den retningen er uendelig, og til høyre når det er nødvendig for fortsatt å ha et uendelig deltre.
- På den måten bygger vi opp en digital strøm som prosedyren vår ikke kan gi noe output fra, for da ville den gjøre det fra en endelig del av strømmen.

Litt om strømmer

- Slik fortsetter vi ved å gå til venstre når deltreet i den retningen er uendelig, og til høyre når det er nødvendig for fortsatt å ha et uendelig deltre.
- På den måten bygger vi opp en digital strøm som prosedyren vår ikke kan gi noe output fra, for da ville den gjøre det fra en endelig del av strømmen.
- Vi har imidlertid sørget for at enhver endelig del av den strømmen vi konstruerer, ligger i T, og derfor er utilstrekkelig for dette.

Litt om strømmer

Litt om strømmer

- Påstanden vi nå har vist, har den praktiske konsekvensen at hvis vi først har greid å lage en prosedyre som gir et svar uansett hvilken digital strøm vi forer den med, så finnes det en øvre grense for hvor lenge vi må vente på et svar, uavhengig av hva input er.

Litt om strømmer

- Påstanden vi nå har vist, har den praktiske konsekvensen at hvis vi først har greid å lage en prosedyre som gir et svar uansett hvilken digital strøm vi forer den med, så finnes det en øvre grense for hvor lenge vi må vente på et svar, uavhengig av hva input er.
- Dette er et eksempel på en påstand hvor vi må gi et indirekte bevis, eller i det minste gå utenom den konstruktive delen av matematikken.

Litt om strømmer

- Påstanden vi nå har vist, har den praktiske konsekvensen at hvis vi først har greid å lage en prosedyre som gir et svar uansett hvilken digital strøm vi forer den med, så finnes det en øvre grense for hvor lenge vi må vente på et svar, uavhengig av hva input er.
- Dette er et eksempel på en påstand hvor vi må gi et indirekte bevis, eller i det minste gå utenom den konstruktive delen av matematikken.
- Dette er ikke noe tema i MAT1030, og vi skal ikke forfølge dette aspektet videre.