MAT1030 – Forelesning 4

Logikk

Roger Antonsen - 21. januar 2009

(Sist oppdatert: 2009-01-22 13:02)

Kapittel 4: Logikk (fortsettelse)

Enda et eksempel

Eksempel.

(a) Jeg liker ikke Bamsemums.
Du liker alt jeg liker.
Altså liker ikke du Bamsemums.

(b) Jeg liker ikke Bamsemums.
Hvis jeg ikke liker Bamsemums, liker ikke du Bamsemums.
Altså liker ikke du Bamsemums.

Her er det opplagt en feil i argument a), mens b) holder fortsatt.

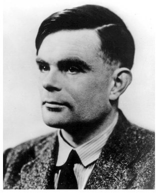
Logisk holdbart argument

Som en tommelfingerregel kan vi si følgende.

> Et argument er *logisk holdbart* hvis vi kan bytte ut delformuleringer som ikke inneholder noe av den logiske strukturen med andre formuleringer uten at argumentet blir feil.

- Hovedutfordringen blir å bestemme hva som tilhører den logiske strukturen og hva vi kan forandre på for å bruke testen over.
- Et argument er logisk holdbart i kraft av sin form, ikke sitt innhold.
- Hvis en datamaskin skal kunne sjekke gyldigheten av et resonnement, må vi eksplisere alle skjulte forutsetninger i resonnementet.
- Vi må også eksplisere hvilke atomære resonnementer som er lovlige, for en maskin kan bare kontrollere om noe er utført i tråd med forhåndsbestemte regler.
- Hvis en maskin skal kunne "forstå" hva som tilhører den logiske strukturen i en formulering, må den knyttes til bruk av spesielle tegn eller ordsekvenser.
- Dette er helt analogt med den rigiditeten som kreves av et program i et programmeringsspråk.

Fire viktige personer

Før vi starter på fagstoffet skal vi trekke frem fire navn som er viktige for utviklingen av logikk i det 20. århundre og for sammenfiltringen av matematisk logikk og teoretisk informatikk.

- Toralf Skolem (1887–1963)
- Kurt Gödel (1906–1978)
- Alan Turing (1912–1954)
- John von Neumann (1903–1957)

Hva skal vi lære av logikk?

- Utsagnslogikk
- Predikatlogikk
- Litt om hvordan man fører bevis
- Algoritmer for å teste om utsagn er logisk holdbare eller ikke

Utsagnslogikk

Definisjon.
Et utsagn er en ytring som enten er sann eller usann.

- Som matematisk definisjon er ikke denne definisjonen spesielt god, ettersom den ikke kan brukes til å bestemme hva som er utsagn og hva som ikke er det.
- Er "Per er en dannet mann" et utsagn?
- Vi vil betrakte dette som et utsagn, ettersom ytringen i en gitt situasjon uttrykker en oppfatning som enten kan aksepteres eller bestrides.
- Vi skal ikke gå nærmere inn på den filosofiske analysen av hva et utsagn er.

Eksempel.
Følgende er eksempler på utsagn, slik vi skal bruke begrepet:

- $2^{10} < 1000$
- $\pi \neq e$
- Anne har røde sko.
- I morgen blir det pent vær.
- Det fins mange grader av uendelighet.

Eksempel.

Følgende ytringer kan ikke oppfattes som utsagn:

- Når går toget?
- Uff!!!
- Dra til deg den lurvete mærschedesen din, eller så kjører jeg på den! (Sitat fra sint trikkefører i Grensen.)
- Måtte sneen ligge lenge og løypene holde seg.

Eksempel.

Vi har sett endel utsagn i forbindelse med formuleringer av kontrollstrukturer i pseudokoder:

- **While** $i > 0$ **do**
- **Repeat** $\cdots$ **until** $x > k$
- **If** x er et partall **then** $\cdots$ **else** $\cdots$

Under en utregning vil verdiene på variablene endre seg, men ved hvert enkelt regneskritt vil "ytringene" enten være sanne eller usanne, og vi ser derfor på dem som utsagn.

Eksemplene på forrige side aktualiserer spørsmålet om matematiske likninger, ulikheter og andre formler hvor det forekommer variable størrelser kan betraktes som utsagn:

- $x^2 + 2x - 1 = 0$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $f(x) = f'(x)$

Det første tilfellet er en likning i variabelen x, det andre en kjent identitet fra trigonometrien og det siste en differensiallikning hvor f er den ukjente.

For at vi skal slippe å slåss om dette er eksempler på utsagn eller ikke, innfører vi et nytt begrep, et predikat.

Definisjon.

Et predikat er en ytring som inneholder en eller flere variable, men som vil bli sant eller usant når vi bestemmer hvilke verdier de variable skal ha.

Eksempel.

Alle eksemplene fra forrige side, $x^2 + 2x - 1 = 0$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ og $f(x) = f'(x)$, er eksempler på predikater. I de to første tilfellene er x variabelen, og i det siste tilfellet er både f og x variable.

Utsagnsvariable og sannhetsverdier

Det er ikke så viktig å vite hva et utsagn er. Det viktige er at når vi betrakter en ytring som et utsagn, stripper vi ytringen for alt untatt egenskapen at den vil være sann eller usann.

Vi vil bruke bokstaver p, q, r og liknende som utsagnsvariable, det vil si at de kan stå for et hvilket som helst utsagn.

Vi vil la **T** og **F** stå for de to sannhetsverdiene sann og usann (*true* og *false*).

Hver utsagnsvariabel p kan da ha en av verdiene **T** eller **F**.

- Det finnes mange andre bokstaver eller symboler man kan anvende for å betegne sannhetsverdiene.
  - true og false
  - T og F
  - $\top$ og $\bot$
  - True og False
  - sann og usann (ordet "gal" anbefales ikke)
  - **S** og **U**

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (og)

Eksempel.
La oss se på følgende prosedyre:

1. Input x [$x \geqslant 0$, x heltall]
2. Input y [$y \geqslant 0$, y heltall]
3. **While** $x > 0$ og $y > 0$ **do**
   - 3.1. $x \leftarrow x - 1$
   - 3.2. $y \leftarrow y - 1$
4. $z \leftarrow x + y$
5. Output z

Dette er en algoritme for å beregne $|x - y|$ fra x og y.

Definisjon.

- Hvis p og q er to utsagn, er uttrykket $p \wedge q$ også et utsagn.
- Vi leser det p **og** q.
- $p \wedge q$ er sann hvis både p og q er sanne, ellers er $p \wedge q$ usann.
- Vi kaller ofte $p \wedge q$ for konjunksjonen av p og q.

Definisjonen av når $p \wedge q$ er sann kan gis i form av en tabell.
En slik tabell kaller vi en sannhetsverditabell.

Utarbeidelsen av sannhetsverditabeller vil være en viktig ferdighet i dette kurset:

p	q	$p \wedge q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

I en matematikk/informatikksammenheng er det greit å bruke symbolet $\wedge$:

- $3 \leqslant x \wedge x \leqslant 5$ er en helt grei formulering.
- **While** $x > 0 \wedge y > 0$ **do** kan være en alternativ måte å starte while-løkka fra eksemplet vårt på.
- Ofte vil man finne at man bruker samme typografi som for andre kontrollstrukturer i denne sammenhengen:

  While $x > 0$ **and** $y > 0$ **do**

  Hvis man gjengir sammensetning av utsagn i dagligtale, er det bedre å bruke ordet "og".

  Man må imidlertid være klar over at den utsagnslogiske forståelsen visker ut noen av de nyansene vi kan legge inn i dagligtale.

  I de to første eksemplene på neste side vil utsagnslogikken fange opp meningen, mens vi i de to neste mister mye av meningen.

Eksempel.

1. Per er født i Oslo og Kari er født i Drammen
2. Jeg liker å spille fotball og jeg liker å drive med fluefiske.
3. Jeg gikk inn i stua og tok av meg skiene
   Jeg tok av meg skiene og gikk inn i stua.
4. Jeg bestilte snegler til forrett og du forlot meg rasende
   Du forlot meg rasende og jeg bestilte snegler til forrett.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (eller)

Det neste bindeordet vi skal se på er *eller*.

Dette ordet kan ha to betydninger, og vi må velge en av dem.

Dette kommer vi tilbake til etter et par eksempler.

Eksempel.
La oss ta utgangspunkt i følgende kontrollstruktur:

1. Input x [$x \geqslant 0$, x heltall]
2. Input y [$y \geqslant 0$, y heltall]
3. $z \leftarrow 0$

4. **While** $x > 0$ eller $y > 0$ **do**
    4.1. $x \leftarrow x - 1$
    4.2. $y \leftarrow y - 1$
    4.3. $z \leftarrow z + 1$
5. Output z

Dette gir oss en algoritme for å beregne $max\{x, y\}$.

Hvis vi gir x og y store verdier n og m, vil både x og y ha positive verdier etter noen få gangers tur i while-løkka, vi ønsker ikke at løkka skal stoppe av den grunn.
Derfor vil vi gjerne at et utsagn "p eller q" skal kunne være sant også når både p og q er sanne, i det minste i denne sammenhengen.
Er $2 \leqslant 3$? Er $3 \leqslant 3$?.
I en matematisk sammenheng vil vi gjerne at begge deler skal være sanne, vil jo at $x \leqslant 3$ skal være oppfylt både av de tallene som er ekte mindre enn 3 og av 3 selv.
Det betyr at når et av leddene i et eller-utsagn er sant, vil vi at hele utsagnet skal være sant.

$$x \leqslant y \text{ er det samme som } x < y \vee x = y$$

Definisjon.

- Hvis p og q er to utsagn, er uttrykket $p \vee q$ også et utsagn.
- Vi leser det p **eller** q.
- $p \vee q$ er sann hvis p, q eller begge to er sanne, ellers er $p \vee q$ usann.
- Vi kaller $p \vee q$ for disjunksjonen av p og q.

Definisjonen av når $p \vee q$ er sann kan også gis i form av en sannhetsverditabelltabell:

p	q	$p \vee q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

Eksempel.

Følgende eksempler fra dagligtale viser at det er to forskjellige måter å forstå ordet 'eller' på

- Du kan få servere pølser eller du kan få servere pizza i bursdagsselskapet.
- Vil du ha en PC eller vil du ha en Mac?
- Jeg kommer til middag om toget er i rute eller om jeg får sitte på med en kollega.
- Om du leser VG eller om du leser Dagbladet finner du ikke noe stoff om hyperbolsk geometri.

Vi skal bruke den inklusive betydningen av *eller*, og vi bruker symbolet $\vee$ eller kontrollstrukturvarianten **or**.

Vi vil bruke dette bindeordet i en matematikk/informatikksammenheng, og være varsomme med å overføre den inklusive tolkningen til dagligtale.

Ekslusiv *eller* kan også defineres ved en sannhetsverditabell.

Dere utfordres til å gjøre dette selv.

I enkelte programmeringssammenhenger, trenger vi å nyansere forståelsen av $\vee$ og av $\wedge$ ytterligere.

Anta at $P(\vec{x})$ og $Q(\vec{x})$ er to prosedyrer ($\vec{x}$ er en vanlig måte å skrive en generell sekvens av variable på), slik at vi ikke kan være sikre på om de tilhørende programmene alltid terminerer.

Anta at vi bruker et programmeringsspråk som tillater kontrollstrukturer av tilnærmet form

If $P(\vec{x}) > 0$ **or** $Q(\vec{x}) > 0$ **then** $\cdots$

Skal vi da kunne fortsette når $P(\vec{x})$ ikke har noen verdi, men $Q(\vec{x}) > 0$?

Diskusjonen foregår muntlig på forelesningen.

Utsagnslogiske bindeord, konnektiver (ikke)

Det neste ordet vi skal se på er ikke i betydningen *det er ikke slik at*.

Eksempel.

- Månen er ikke full i morgen.
- Hurtigruta går ikke innom Narvik.
- Jeg rekker ikke middagen
- Jeg liker ikke Bamsemums.

I alle disse tilfellene benekter vi en positiv påstand, eksempelvis "Jeg liker Bamsemums".

Eksempel.

1. Input x [$x \geqslant 0$ heltall]
2. Input y [y heltall, $0 \leqslant y \leqslant x$]
3. **While** $y \neq 0$ **do**
   3.1. $z \leftarrow y$
   3.2. $y \leftarrow \mathrm{rest}(x, y)$ [$\mathrm{rest}(x, y)$ gir restdelen når x deles på y]
   3.3. $x \leftarrow z$
4. Output x

Dette er en måte å formulere Euklids algoritme på (en måte å finne største felles faktor i to tall på).
Poenget her er formuleringen $y \neq 0$, en benektelse av at $y = 0$.

Vi vil vil bruke et spesielt tegn, $\neg$ for å uttrykke at vi benekter et utsagn.

Definisjon.

- Hvis p er et utsagn, er $\neg p$ et utsagn.
- $\neg p$ får sannhetsverdien **F** om p har sannhetsverdien **T** og $\neg p$ får sannhetsverdien **T** om p har sannhetsverdien **F**.
- Vi kaller $\neg p$ for negasjonen av p.

Vi kan også gi denne definisjonen på sannhetsverditabellform:

p	$\neg p$
T	**F**
F	**T**

Denne tabellen er selvforklarende.

Sammensatte utsagn

Vi skal snu litt på rekkefølgen av stoffet i forhold til læreboka.

Ved å bruke konnektivene $\wedge$, $\vee$ og $\neg$ har vi gitt utsagnslogikken sin fulle uttrykkskraft.

De konnektivene vi skal se på senere, kan erstattes med sammensatte uttrykk hvor vi bare bruker $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.

Det er faktisk mulig å klare seg med bare $\neg$ og $\wedge$ eller bare med $\neg$ og $\vee$, men da trenger vi sammensatte utsagn som det er vanskelig å lese.

For å fortsette denne diskusjonen, må vi se på hva vi mener med sammensatte utsagn.

Sammensatte utsagn, bruk av parenteser

Vi har sett at $x \neq 0$ egentlig er en alternativ skrivemåte for $\neg(x = 0)$.

Anta at vi i en programmeringssammenheng har bruk for å uttrykke betingelsen $x \neq 0$ og $y > 0$.

Dette burde vi kunne skrive som

$$\neg(x = 0) \wedge y > 0.$$

Hvis p er utsagnet $x = 0$, q er utsagnet $y > 0$ og r er utsagnet $p \wedge q$, skal $\neg r$ være utsagnet $\neg p \wedge q$?

Det var vel ikke det vi mente, $\cdots$, eller?