MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 6: Logikk, predikatlogikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

28. januar 2009

(Sist oppdatert: 2009-01-28 12:23)

Kapittel 4: Logikk (utsagnslogikk)

Mer om parenteser

Mer om parenteser

Eksempel

Mer om parenteser

Eksempel

$$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$

Mer om parenteser

Eksempel

$$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$

- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.

Mer om parenteser

Eksempel

$$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$

- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\land$ og $\lor$ skiller mer enn $\neg$.

Mer om parenteser

Eksempel

$$(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\wedge$ og $\vee$ skiller mer enn $\neg$.
- Vi skal også la $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$ skille mer enn $\wedge$ og $\vee$.

Mer om parenteser

Eksempel

$$(p \wedge q \to r) \to (p \to r) \vee (q \to r)$$

- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\wedge$ og $\vee$ skiller mer enn $\neg$.
- Vi skal også la $\to$ og $\leftrightarrow$ skille mer enn $\wedge$ og $\vee$.
- Det betyr at utsagnet over egentlig skal være

$$(((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r)))$$

Mer om parenteser

Eksempel

$$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$

- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\land$ og $\lor$ skiller mer enn $\neg$.
- Vi skal også la $\to$ og $\leftrightarrow$ skille mer enn $\land$ og $\lor$.
- Det betyr at utsagnet over egentlig skal være

$$(((p \land q) \to r) \to ((p \to r) \lor (q \to r)))$$

noe som ikke akkurat er lettere å lese.

Mer om parenteser

Mer om parenteser

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen

Mer om parenteser

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.

Mer om parenteser

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.
- Vi oppdager at høyre kolonne vil inneholde **T** i alle linjer.

Mer om parenteser

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.
- Vi oppdager at høyre kolonne vil inneholde **T** i alle linjer.
- Det betyr at utsagnet er sant uansett hvilke grunnutsagn vi setter inn for p, q og r.

Mer om parenteser

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.
- Vi oppdager at høyre kolonne vil inneholde **T** i alle linjer.
- Det betyr at utsagnet er sant uansett hvilke grunnutsagn vi setter inn for p, q og r.
- Da må $(p \to r) \vee (q \to r)$ være en logisk konsekvens av $p \wedge q \to r$.

Mer om parenteser

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.
- Vi oppdager at høyre kolonne vil inneholde **T** i alle linjer.
- Det betyr at utsagnet er sant uansett hvilke grunnutsagn vi setter inn for p, q og r.
- Da må $(p \to r) \vee (q \to r)$ være en logisk konsekvens av $p \wedge q \to r$.
  (Vi skal snart definere begrepet om logisk konsekvens helt presist.)

Mer om parenteser

Mer om parenteser

- La p stå for “Jeg betaler semesteravgift”.

Mer om parenteser

- La p stå for “Jeg betaler semesteravgift”.
- La q stå for “Jeg får godkjent obligene”.

Mer om parenteser

- La p stå for “Jeg betaler semesteravgift”.
- La q stå for “Jeg får godkjent obligene”.
- La r stå for “Jeg kan gå opp til eksamen”.

Mer om parenteser

- La p stå for “Jeg betaler semesteravgift”.
- La q stå for “Jeg får godkjent obligene”.
- La r stå for “Jeg kan gå opp til eksamen”.
- Da er

Mer om parenteser

- La p stå for “Jeg betaler semesteravgift”.
- La q stå for “Jeg får godkjent obligene”.
- La r stå for “Jeg kan gå opp til eksamen”.
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

Mer om parenteser

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent obligene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

  en logisk konsekvens av

Mer om parenteser

- La p stå for “Jeg betaler semesteravgift”.
- La q stå for “Jeg får godkjent obligene”.
- La r stå for “Jeg kan gå opp til eksamen”.
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

  en logisk konsekvens av
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften og får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

Mer om parenteser

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent obligene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

  en logisk konsekvens av
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften og får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

  Er det noe galt her, og i så fall hva?

Mer om parenteser

Mer om parenteser

- Hvordan skal vi forstå utsagn som

$$p \wedge q \wedge r$$

og

$$p \vee q \vee r$$

Mer om parenteser

- Hvordan skal vi forstå utsagn som

$$p \land q \land r$$

og

$$p \lor q \lor r$$

- I slike tilfeller vil vi få den samme høyrekolonnen i sannhetsverditabellen uansett hvordan vi setter parentesene, så vi kan like godt la det være.

Tautologier og kontradiksjoner

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.
- A er en tautologi hvis A får verdien **T** for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare **T** i høyre kolonne.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.
- A er en tautologi hvis A får verdien **T** for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare **T** i høyre kolonne.
- Vi kunne brukt ordene selvoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.
- A er en tautologi hvis A får verdien **T** for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare **T** i høyre kolonne.
- Vi kunne brukt ordene selvoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.
- Hvis sannhetsverdien til A derimot alltid blir **F**, kaller vi A en kontradiksjon eller en selvmotsigelse.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.
- A er en tautologi hvis A får verdien **T** for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare **T** i høyre kolonne.
- Vi kunne brukt ordene selvoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.
- Hvis sannhetsverdien til A derimot alltid blir **F**, kaller vi A en kontradiksjon eller en selvmotsigelse.
- En tautologi er, med andre ord, et utsagn som alltid er sant

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.
- A er en tautologi hvis A får verdien **T** for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare **T** i høyre kolonne.
- Vi kunne brukt ordene selvoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.
- Hvis sannhetsverdien til A derimot alltid blir **F**, kaller vi A en kontradiksjon eller en selvmotsigelse.
- En tautologi er, med andre ord, et utsagn som alltid er sant, og en kontradiksjon er et utsagn som alltid er usant.

Tautologier og kontradiksjoner

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \lor \neg p$ er en tautologi.
- $p \land \neg p$ er en kontradiksjon.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \to (q \to p)$ er en tautologi.
- $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \to (q \to p)$ er en tautologi.
- $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ er en tautologi.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \to (q \to p)$ er en tautologi.
- $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ er en tautologi.
- $(p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \lor \neg p$ er en tautologi.
- $p \land \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \to (q \to p)$ er en tautologi.
- $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ er en tautologi.
- $(p \leftrightarrow q) \land p \land \neg q$ er en kontradiksjon.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ er en tautologi.
- $(p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ er en kontradiksjon.
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ er en tautologi.
- $(p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ er en kontradiksjon.
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ er en tautologi.

Logisk ekvivalens

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \wedge \neg q$)

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \wedge \neg q$)

Eksempel ($\neg(p \vee q)$)

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \land \neg q$)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \land \neg q$
T	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

Eksempel ($\neg(p \lor q)$)

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \wedge \neg q$)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

Eksempel ($\neg(p \vee q)$)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

Logisk ekvivalens

Eksempel $(\neg p \land \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \land \neg q$
T	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

Eksempel $(\neg(p \lor q))$

p	q	$p \lor q$	$\neg(p \lor q)$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

Vi ser at høyrekolonnene er identiske.

Logisk ekvivalens

Logisk ekvivalens

Definisjon

Logisk ekvivalens

Definisjon

- La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.

Logisk ekvivalens

Definisjon

- La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.
- Vi sier at A og B er logisk ekvivalente hvis A og B har samme sannhetsverdi uansett hvilke verdier vi gir til utsagnsvariablene.

Logisk ekvivalens

Definisjon

- La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.
- Vi sier at A og B er logisk ekvivalente hvis A og B har samme sannhetsverdi uansett hvilke verdier vi gir til utsagnsvariablene.
- Vi skriver

$$A \equiv B$$

  når A og B er logisk ekvivalente.

Logisk ekvivalens

Logisk ekvivalens

Eksempel

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \land \neg q \equiv \neg(p \lor q)$

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \land \neg q \equiv \neg(p \lor q)$
- $\neg p \lor \neg q \equiv \neg(p \land q)$
- $\neg\neg p \equiv p$

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$
- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$
- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \to q \equiv \neg p \vee q$
- $p \to (q \to p) \equiv \mathbf{T}$

Logisk konsekvens

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

- La A og B være sammensatte utsagn.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

- La A og B være sammensatte utsagn.
- B er en logisk konsekvens av A dersom $A \to B$ er en tautologi.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

- La A og B være sammensatte utsagn.
- B er en logisk konsekvens av A dersom $A \to B$ er en tautologi.
- Vi skriver ofte $A \Rightarrow B$ når B er en logisk konsekvens av A.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

- La A og B være sammensatte utsagn.
- B er en logisk konsekvens av A dersom $A \to B$ er en tautologi.
- Vi skriver ofte $A \Rightarrow B$ når B er en logisk konsekvens av A.

- Merk at uttrykk som $A \equiv B$ og $A \Rightarrow B$ ligger på utsiden av den formelle utsagnslogikken.

Logiske lover

Logiske lover

- Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt “laws of logic”.

Logiske lover

- Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt “laws of logic”.
- Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.

Logiske lover

- Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt "laws of logic".
- Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.
- Det er et faktum (vi ikke skal bevise nå) at vi kan regne oss frem til **T** fra enhver tautologi.

Logiske lover

- Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt “laws of logic”.
- Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.
- Det er et faktum (vi ikke skal bevise nå) at vi kan regne oss frem til **T** fra enhver tautologi.
- At disse lovene virkelig kan brukes som regneregler, bør bevises, og det skal vi gjøre nå.

Logiske lover

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$

$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

  - Distributive lover:

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$

$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

  - Distributive lover:

$$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$$

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

  - Distributive lover:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

  - Distributive lover:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Vi skal snart se på et eksempel på hvordan vi kan vise at et sammensatt utsagn er en tautologi ved å bruke disse regnereglene.

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$

$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

  - Distributive lover:

$$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$$

$$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$$

- Vi skal snart se på et eksempel på hvordan vi kan vise at et sammensatt utsagn er en tautologi ved å bruke disse regnereglene.
- Vi henviser til betegnelsene i tabellen på side 55.

Logiske lover

Logiske lover

Teorem

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.
- Da er $A \equiv D$.

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.
- Da er $A \equiv D$.

Bevis

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.
- Da er $A \equiv D$.

Bevis

- I sannhetsverditabellen for A har vi en kolonne for B, og det er bare verdiene i denne kolonnen vi bruker videre.

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.
- Da er $A \equiv D$.

Bevis

- I sannhetsverditabellen for A har vi en kolonne for B, og det er bare verdiene i denne kolonnen vi bruker videre.
- Vi ville fått samme sluttresultat om vi hadde brukt en kolonne for C i stedet for.

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.
- Da er $A \equiv D$.

Bevis

- I sannhetsverditabellen for A har vi en kolonne for B, og det er bare verdiene i denne kolonnen vi bruker videre.
- Vi ville fått samme sluttresultat om vi hadde brukt en kolonne for C i stedet for.
- Dette svarer til å sette opp sannhetsverditabellen for D.

Strategier

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi "løse likningen" $A = \mathbf{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi "løse likningen" $A = \mathbf{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.

  Hvis likningen ikke har løsning, så er A en tautologi.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi "løse likningen" $A = \mathbf{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.

  Hvis likningen ikke har løsning, så er A en tautologi.
- Hva som er mest hensiktsmessig avhenger av hvordan det sammensatte utsagnet ser ut.

Bruk av regneregler

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \lor q) \land (p \lor \neg q) \to p)$

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \lor q) \land (p \lor \neg q) \to p)$

- $(p \lor q) \land (p \lor \neg q) \to p$
- $\neg((p \lor q) \land (p \lor \neg q)) \lor p$ [Eliminasjon av $\to$]

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \to p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \to p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av $\to$]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \to p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \to p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av $\to$]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee p$ [To gangers bruk av DeMorgan]

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av $\rightarrow$]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee p$ [To gangers bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg q)) \vee p$ [Distributiv lov]

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av $\rightarrow$]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee p$ [To gangers bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg q)) \vee p$ [Distributiv lov]
- $(\neg p \wedge \mathbf{T}) \vee p$ [Invers lov]

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av $\rightarrow$]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee p$ [To gangers bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg q)) \vee p$ [Distributiv lov]
- $(\neg p \wedge \mathbf{T}) \vee p$ [Invers lov]
- $\neg p \vee p$ [Identitetsloven]

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \lor q) \land (p \lor \neg q) \to p)$

- $(p \lor q) \land (p \lor \neg q) \to p$
- $\neg((p \lor q) \land (p \lor \neg q)) \lor p$ [Eliminasjon av $\to$]
- $\neg(p \lor q) \lor \neg(p \lor \neg q) \lor p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg\neg q) \lor p$ [To gangers bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \land (\neg q \lor \neg\neg q)) \lor p$ [Distributiv lov]
- $(\neg p \land \mathbf{T}) \lor p$ [Invers lov]
- $\neg p \lor p$ [Identitetsloven]
- $\mathbf{T}$ [Invers lov]

Bruk av regneregler

Bruk av regneregler

- Vi antydet også at det er mulig å vise at et sammensatt utsagn A er en tautologi ved å vise at likningen

$$A = \mathbf{F}$$

ikke holder.

Bruk av regneregler

- Vi antydet også at det er mulig å vise at et sammensatt utsagn A er en tautologi ved å vise at likningen

$$A = \mathbf{F}$$

ikke holder.

- Vi skal gi ett eksempel på hvordan vi kan "løse" slike likninger.

Bruk av regneregler

- Vi antydet også at det er mulig å vise at et sammensatt utsagn A er en tautologi ved å vise at likningen

$$A = \mathbf{F}$$

  ikke holder.
- Vi skal gi ett eksempel på hvordan vi kan "løse" slike likninger.
- Metoden kan være nyttig når A har mange forekomster av $\rightarrow$.

Bruk av regneregler

- Vi antydet også at det er mulig å vise at et sammensatt utsagn A er en tautologi ved å vise at likningen

$$A = \mathbf{F}$$

  ikke holder.
- Vi skal gi ett eksempel på hvordan vi kan "løse" slike likninger.
- Metoden kan være nyttig når A har mange forekomster av $\rightarrow$.
- Programmeringsspråket *PROLOG* er basert på en systematisering av denne metoden, koblet med predikatlogikk.

Bruk av regneregler

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \to r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \to r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \to r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \to r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \to r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)
6. $p = \mathbf{T}$ (Fra 5.)

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \to r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \to r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)
6. $p = \mathbf{T}$ (Fra 5.)
7. $r = \mathbf{F}$ (Fra 5.)

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \to r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \to r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)
6. $p = \mathbf{T}$ (Fra 5.)
7. $r = \mathbf{F}$ (Fra 5.)
8. $q = \mathbf{F}$ (Fra 4 og 7.)

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \to r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \to r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)
6. $p = \mathbf{T}$ (Fra 5.)
7. $r = \mathbf{F}$ (Fra 5.)
8. $q = \mathbf{F}$ (Fra 4 og 7.)
9. $p = \mathbf{F}$ (Fra 2 og 8)

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \to r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \to r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)
6. $p = \mathbf{T}$ (Fra 5.)
7. $r = \mathbf{F}$ (Fra 5.)
8. $q = \mathbf{F}$ (Fra 4 og 7.)
9. $p = \mathbf{F}$ (Fra 2 og 8)
10. $p \neq p$ (Fra 6 og 9.)

En oppgave

En oppgave

Oppgave

En oppgave

Oppgave

a) Vis at hvis A, B og C er sammensatte utsagn, så vil

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

og at

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A).$$

En oppgave

Oppgave

a) Vis at hvis A, B og C er sammensatte utsagn, så vil

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

og at

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A).$$

b) Forklar hvorfor dette betyr at rekkefølge og parentessetting ikke betyr noe i et utsagnslogisk uttrykk som bare bruker bindeordet $\leftrightarrow$

En oppgave

Oppgave

a) Vis at hvis A, B og C er sammensatte utsagn, så vil

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

og at

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A).$$

b) Forklar hvorfor dette betyr at rekkefølge og parentessetting ikke betyr noe i et utsagnslogisk uttrykk som bare bruker bindeordet $\leftrightarrow$

c) [Vanskelig] Hvordan kan vi lett avgjøre om et slikt uttrykk er en tautologi eller ikke?

Oppsummering

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene **T** og **F**, begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene **T** og **F**, begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.
- Vi har sett hvordan vi kan undersøke egenskapene til et sammensatt utsagn A ved å skrive ut sannhetsverditabellen til A.

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene **T** og **F**, begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.
- Vi har sett hvordan vi kan undersøke egenskapene til et sammensatt utsagn A ved å skrive ut sannhetsverditabellen til A.
- Et sammensatt utsagn A er en tautologi om A alltid får verdien **T** og A er en kontradiksjon om A alltid får verdien **F**.

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene **T** og **F**, begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.
- Vi har sett hvordan vi kan undersøke egenskapene til et sammensatt utsagn A ved å skrive ut sannhetsverditabellen til A.
- Et sammensatt utsagn A er en tautologi om A alltid får verdien **T** og A er en kontradiksjon om A alltid får verdien **F**.
- To sammensatte utsagn A og B er logisk ekvivalente om de alltid får den samme sannhetsverdien når vi gir sannhetsverdier til utsagnsvariablene.

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene **T** og **F**, begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.
- Vi har sett hvordan vi kan undersøke egenskapene til et sammensatt utsagn A ved å skrive ut sannhetsverditabellen til A.
- Et sammensatt utsagn A er en tautologi om A alltid får verdien **T** og A er en kontradiksjon om A alltid får verdien **F**.
- To sammensatte utsagn A og B er logisk ekvivalente om de alltid får den samme sannhetsverdien når vi gir sannhetsverdier til utsagnsvariablene.
- Dette er det samme som at $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene **T** og **F**, begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.
- Vi har sett hvordan vi kan undersøke egenskapene til et sammensatt utsagn A ved å skrive ut sannhetsverditabellen til A.
- Et sammensatt utsagn A er en tautologi om A alltid får verdien **T** og A er en kontradiksjon om A alltid får verdien **F**.
- To sammensatte utsagn A og B er logisk ekvivalente om de alltid får den samme sannhetsverdien når vi gir sannhetsverdier til utsagnsvariablene.
- Dette er det samme som at $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.
- Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er logisk ekvivalente.

Oppsummering

Oppsummering

- Vi har diskutert konvensjoner for å sette parenteser.

Oppsummering

- Vi har diskutert konvensjoner for å sette parenteser.
- Rekkevidden til $\neg$ er det nærmeste deluttrykket som kan oppfattes som et utsagn. Vil vi at $\neg$ skal rekke lenger enn til nærmeste utsagnsvariabel, må vi bruke parenteser.

Oppsummering

- Vi har diskutert konvensjoner for å sette parenteser.
- Rekkevidden til $\neg$ er det nærmeste deluttrykket som kan oppfattes som et utsagn. Vil vi at $\neg$ skal rekke lenger enn til nærmeste utsagnsvariabel, må vi bruke parenteser.
- Rekkevidden til $\wedge$ og $\vee$ går til nærmeste symbol som ikke er $\neg$

Oppsummering

- Vi har diskutert konvensjoner for å sette parenteser.
- Rekkevidden til $\neg$ er det nærmeste deluttrykket som kan oppfattes som et utsagn. Vil vi at $\neg$ skal rekke lenger enn til nærmeste utsagnsvariabel, må vi bruke parenteser.
- Rekkevidden til $\wedge$ og $\vee$ går til nærmeste symbol som ikke er $\neg$
- Rekkevidden til $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$ går frem til neste forekomst av $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$, det vil si, forbi $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.

Oppsummering

- Vi har diskutert konvensjoner for å sette parenteser.
- Rekkevidden til $\neg$ er det nærmeste deluttrykket som kan oppfattes som et utsagn. Vil vi at $\neg$ skal rekke lenger enn til nærmeste utsagnsvariabel, må vi bruke parenteser.
- Rekkevidden til $\wedge$ og $\vee$ går til nærmeste symbol som ikke er $\neg$
- Rekkevidden til $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$ går frem til neste forekomst av $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$, det vil si, forbi $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.
- Vi kan sette $\wedge$ mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, og vi kan sette $\vee$ mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, men bruker vi både $\wedge$ og $\vee$ må vi bruke parenteser for å bestemme hvilket som er hovedkonnektivet.

Oppsummering

- Vi har diskutert konvensjoner for å sette parenteser.
- Rekkevidden til $\neg$ er det nærmeste deluttrykket som kan oppfattes som et utsagn. Vil vi at $\neg$ skal rekke lenger enn til nærmeste utsagnsvariabel, må vi bruke parenteser.
- Rekkevidden til $\wedge$ og $\vee$ går til nærmeste symbol som ikke er $\neg$
- Rekkevidden til $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$ går frem til neste forekomst av $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$, det vil si, forbi $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.
- Vi kan sette $\wedge$ mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, og vi kan sette $\vee$ mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, men bruker vi både $\wedge$ og $\vee$ må vi bruke parenteser for å bestemme hvilket som er hovedkonnektivet.
- Vi må alltid bruke parenteser hvis vi bruker flere $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$ etter hverandre, f.eks. $p \rightarrow q \rightarrow r$.

Oppsummering

Oppsummering

Eksempel $(p \to (q \to r))$

Eksempel $((p \to q) \to r)$

Oppsummering

Eksempel ($p \to (q \to r)$)

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p =$ **T** og $q \to r =$ **F**.

Eksempel ($(p \to q) \to r$)

Oppsummering

Eksempel $(p \to (q \to r))$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p = \mathbf{T}$ og $q \to r = \mathbf{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien **F** nøyaktig når $p = \mathbf{T}$, $q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Eksempel $((p \to q) \to r)$

Oppsummering

Eksempel $(p \to (q \to r))$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p = \mathbf{T}$ og $q \to r = \mathbf{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien **F** nøyaktig når $p = \mathbf{T}$, $q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Eksempel $((p \to q) \to r)$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p \to q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Oppsummering

Eksempel $(p \to (q \to r))$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p = \mathbf{T}$ og $q \to r = \mathbf{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien **F** nøyaktig når $p = \mathbf{T}$, $q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Eksempel $((p \to q) \to r)$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p \to q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.
- Dette utsagnet får altså verdien **F** når det første utsagnet får det,

Oppsummering

Eksempel $(p \to (q \to r))$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p = \mathbf{T}$ og $q \to r = \mathbf{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien **F** nøyaktig når $p = \mathbf{T}$, $q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Eksempel $((p \to q) \to r)$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p \to q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.
- Dette utsagnet får altså verdien **F** når det første utsagnet får det, men også når $p = \mathbf{F}$ og $r = \mathbf{F}$ (uansett verdi på q.)

Oppsummering

Eksempel $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p = \mathbf{T}$ og $q \rightarrow r = \mathbf{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien **F** nøyaktig når $p = \mathbf{T}$, $q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Eksempel $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p \rightarrow q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.
- Dette utsagnet får altså verdien **F** når det første utsagnet får det, men også når $p = \mathbf{F}$ og $r = \mathbf{F}$ (uansett verdi på q.)

Utsagnene er altså ikke logisk ekvivalente.

Oppsummering

Eksempel $(p \to (q \to r))$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p = \mathbf{T}$ og $q \to r = \mathbf{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien **F** nøyaktig når $p = \mathbf{T}$, $q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Eksempel $((p \to q) \to r)$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p \to q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.
- Dette utsagnet får altså verdien **F** når det første utsagnet får det, men også når $p = \mathbf{F}$ og $r = \mathbf{F}$ (uansett verdi på q.)

Utsagnene er altså ikke logisk ekvivalente.

Vi må bruke parentesene for å skille dem.