

MAT1030 – Forelesning 6

Logikk, predikatlogikk

Roger Antonsen - 28. januar 2009

(Sist oppdatert: 2009-01-28 12:23)

Kapittel 4: Logikk (utsagnslogikk)

Mer om parenteser

Eksempel.

$$(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at \wedge og \vee skiller mer enn \neg .
- Vi skal også la \rightarrow og \leftrightarrow skille mer enn \wedge og \vee .
- Det betyr at utsagnet over egentlig skal være

$$(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)))$$

noe som ikke akkurat er lettere å lese.

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.
- Vi oppdager at høyre kolonne vil inneholde **T** i alle linjer.
- Det betyr at utsagnet er sant uansett hvilke grunnutsagn vi setter inn for p , q og r .
- Da må $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ være en logisk konsekvens av $p \wedge q \rightarrow r$.
(Vi skal snart definere begrepet om logisk konsekvens helt presist.)
- La p stå for “Jeg betaler semesteravgift”.
- La q stå for “Jeg får godkjent obligene”.
- La r stå for “Jeg kan gå opp til eksamen”.
- Da er
 - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.en logisk konsekvens av
 - Hvis jeg betaler semesteravgiften og får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.Er det noe galt her, og i så fall hva?
- Hvordan skal vi forstå utsagn som

$$p \wedge q \wedge r$$

og

$$p \vee q \vee r$$

- I slike tilfeller vil vi få den samme høyrekolonnen i sannhetsverditabellen uansett hvordan vi setter parentesene, så vi kan like godt la det være.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon.

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene p_1, \dots, p_n .
- A er en tautologi hvis A får verdien **T** for alle fordelinger av sannhetsverdier på p_1, \dots, p_n , det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare **T** i høyre kolonne.
- Vi kunne brukt ordene selvpoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.
- Hvis sannhetsverdien til A derimot alltid blir **F**, kaller vi A en kontradiksjon eller en selvmotsigelse.
- En tautologi er, med andre ord, et utsagn som alltid er sant, og en kontradiksjon er et utsagn som alltid er usant.

Eksempel.

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ er en tautologi.
- $(p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ er en kontradiksjon.
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ er en tautologi.

Logisk ekvivalens

Eksempel $(\neg p \wedge \neg q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Eksempel ($\neg(p \vee q)$).

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

Vi ser at høyrekolonnene er identiske.

Definisjon.

- La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.
- Vi sier at A og B er logisk ekvivalente hvis A og B har samme sannhetsverdi uansett hvilke verdier vi gir til utsagnsvariablene.
- Vi skriver

$$A \equiv B$$

når A og B er logisk ekvivalente.

Eksempel.

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$
- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \mathbf{T}$

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon.

- La A og B være sammensatte utsagn.
- B er en logisk konsekvens av A dersom $A \rightarrow B$ er en tautologi.
- Vi skriver ofte $A \Rightarrow B$ når B er en logisk konsekvens av A.

- Merk at uttrykk som $A \equiv B$ og $A \Rightarrow B$ ligger på utsiden av den formelle utsagnslogikken.

Logiske lover

- Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt “laws of logic”.
- Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.
- Det er et faktum (vi ikke skal bevise nå) at vi kan regne oss frem til **T** fra enhver tautologi.
- At disse lovene virkelig kan brukes som regneregler, bør bevises, og det skal vi gjøre nå.
- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:

- DeMorgans lover:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

- Distributive lover:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Vi skal snart se på et eksempel på hvordan vi kan vise at et sammensatt utsagn er en tautologi ved å bruke disse regnereglene.
- Vi henviser til betegnelsene i tabellen på side 55.

Teorem.

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A .
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C .
- Da er $A \equiv D$.

Bevis.

- I sannhetsverditabellen for A har vi en kolonne for B , og det er bare verdiene i denne kolonnen vi bruker videre.
- Vi ville fått samme sluttresultat om vi hadde brukt en kolonne for C i stedet for.
- Dette svarer til å sette opp sannhetsverditabellen for D .

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere \leftrightarrow og \rightarrow , flytte alle forekomster av \neg så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi “løse likningen” $A = \mathbf{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.
Hvis likningen ikke har løsning, så er A en tautologi.
- Hva som er mest hensiktsmessig avhenger av hvordan det sammensatte utsagnet ser ut.

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p)$.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av \rightarrow]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg \neg q) \vee p$ [To gangers bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg \neg q)) \vee p$ [Distributiv lov]
- $(\neg p \wedge \mathbf{T}) \vee p$ [Invers lov]
- $\neg p \vee p$ [Identitetsloven]
- \mathbf{T} [Invers lov]

- Vi antydte også at det er mulig å vise at et sammensatt utsagn A er en tautologi ved å vise at likningen

$$A = \mathbf{F}$$

ikke holder.

- Vi skal gi ett eksempel på hvordan vi kan “løse” slike likninger.
- Metoden kan være nyttig når A har mange forekomster av \rightarrow .
- Programmeringsspråket *PROLOG* er basert på en systematisering av denne metoden, koblet med predikatlogikk.

Eksempel $((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$.

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) = \mathbf{F}$
2. $p \rightarrow q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \rightarrow r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \rightarrow r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)

6. $p = \mathbf{T}$ (Fra 5.)
7. $r = \mathbf{F}$ (Fra 5.)
8. $q = \mathbf{F}$ (Fra 4 og 7.)
9. $p = \mathbf{F}$ (Fra 2 og 8)
10. $p \neq p$ (Fra 6 og 9.)

En oppgave

Oppgave.

- a) Vis at hvis A , B og C er sammensatte utsagn, så vil

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

og at

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A).$$

- b) Forklar hvorfor dette betyr at rekkefølge og parentessetting ikke betyr noe i et utsagnslogisk uttrykk som bare bruker bindeordet \leftrightarrow
- c) [Vanskelig] Hvordan kan vi lett avgjøre om et slikt uttrykk er en tautologi eller ikke?

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene \mathbf{T} og \mathbf{F} , begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene \wedge , \vee , \neg , \rightarrow og \leftrightarrow .
- Vi har sett hvordan vi kan undersøke egenskapene til et sammensatt utsagn A ved å skrive ut sannhetsverditabellen til A .
- Et sammensatt utsagn A er en tautologi om A alltid får verdien \mathbf{T} og A er en kontradiksjon om A alltid får verdien \mathbf{F} .
- To sammensatte utsagn A og B er logisk ekvivalente om de alltid får den samme sannhetsverdien når vi gir sannhetsverdier til utsagnsvariablene.
- Dette er det samme som at $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.
- Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er logisk ekvivalente.
- Vi har diskutert konvensjoner for å sette parenteser.
- Rekkevidden til \neg er det nærmeste deluttrykket som kan oppfattes som et utsagn. Vil vi at \neg skal rekke lenger enn til nærmeste utsagnsvariabel, må vi bruke parenteser.
- Rekkevidden til \wedge og \vee går til nærmeste symbol som ikke er \neg
- Rekkevidden til \rightarrow og \leftrightarrow går frem til neste forekomst av \rightarrow eller \leftrightarrow , det vil si, forbi \neg , \wedge og \vee .
- Vi kan sette \wedge mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, og vi kan sette \vee mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, men bruker vi både \wedge og \vee må vi bruke parenteser for å bestemme hvilket som er hovedkonnektivet.

- Vi må alltid bruke parenteser hvis vi bruker flere \rightarrow eller \leftrightarrow etter hverandre, f.eks. $p \rightarrow q \rightarrow r$.

Eksempel ($p \rightarrow (q \rightarrow r)$).

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p = \mathbf{T}$ og $q \rightarrow r = \mathbf{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien **F** nøyaktig når $p = \mathbf{T}$, $q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Eksempel ($(p \rightarrow q) \rightarrow r$).

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p \rightarrow q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.
- Dette utsagnet får altså verdien **F** når det første utsagnet får det, men også når $p = \mathbf{F}$ og $r = \mathbf{F}$ (uansett verdi på q .)

Utsagnene er altså ikke logisk ekvivalente.

Vi må bruke parentesene for å skille dem.