MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 6: Logikk, predikatlogikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

28. januar 2009

(Sist oppdatert: 2009-01-28 12:23)

Kapittel 4: Logikk (utsagnslogikk)

Mer om parenteser

Eksempel

$$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$

- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\land$ og $\lor$ skiller mer enn $\neg$.
- Vi skal også la $\to$ og $\leftrightarrow$ skille mer enn $\land$ og $\lor$.
- Det betyr at utsagnet over egentlig skal være

$$(((p \land q) \to r) \to ((p \to r) \lor (q \to r)))$$

noe som ikke akkurat er lettere å lese.

Mer om parenteser

- Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.
- Vi oppdager at høyre kolonne vil inneholde **T** i alle linjer.
- Det betyr at utsagnet er sant uansett hvilke grunnutsagn vi setter inn for p, q og r.
- Da må $(p \to r) \lor (q \to r)$ være en logisk konsekvens av $p \land q \to r$. (Vi skal snart definere begrepet om logisk konsekvens helt presist.)

Mer om parenteser

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent obligene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

  en logisk konsekvens av
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften og får godkjent obligene kan jeg gå opp til eksamen.

  Er det noe galt her, og i så fall hva?

Mer om parenteser

- Hvordan skal vi forstå utsagn som

$$p \land q \land r$$

og

$$p \lor q \lor r$$

- I slike tilfeller vil vi få den samme høyrekolonnen i sannhetsverditabellen uansett hvordan vi setter parentesene, så vi kan like godt la det være.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

- La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.
- A er en tautologi hvis A får verdien **T** for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare **T** i høyre kolonne.
- Vi kunne brukt ordene selvoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.
- Hvis sannhetsverdien til A derimot alltid blir **F**, kaller vi A en kontradiksjon eller en selvmotsigelse.
- En tautologi er, med andre ord, et utsagn som alltid er sant, og en kontradiksjon er et utsagn som alltid er usant.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \vee \neg p$ er en tautologi.
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon.
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ er en tautologi.
- $(p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ er en kontradiksjon.
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ er en tautologi.

Logisk ekvivalens

Eksempel $(\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

Eksempel $(\neg(p \vee q))$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

Vi ser at høyrekolonnene er identiske.

Logisk ekvivalens

Definisjon

- La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.
- Vi sier at A og B er logisk ekvivalente hvis A og B har samme sannhetsverdi uansett hvilke verdier vi gir til utsagnsvariablene.
- Vi skriver

$$A \equiv B$$

  når A og B er logisk ekvivalente.

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$
- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \mathbf{T}$

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

- La A og B være sammensatte utsagn.
- B er en logisk konsekvens av A dersom $A \to B$ er en tautologi.
- Vi skriver ofte $A \Rightarrow B$ når B er en logisk konsekvens av A.

- Merk at uttrykk som $A \equiv B$ og $A \Rightarrow B$ ligger på utsiden av den formelle utsagnslogikken.

Logiske lover

- Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt "laws of logic".
- Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.
- Det er et faktum (vi ikke skal bevise nå) at vi kan regne oss frem til **T** fra enhver tautologi.
- At disse lovene virkelig kan brukes som regneregler, bør bevises, og det skal vi gjøre nå.

Logiske lover

- Noen av de viktigste regnereglene for logikk i boken er:
  - DeMorgans lover:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

  - Distributive lover:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Vi skal snart se på et eksempel på hvordan vi kan vise at et sammensatt utsagn er en tautologi ved å bruke disse regnereglene.
- Vi henviser til betegnelsene i tabellen på side 55.

Logiske lover

Teorem

- La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.
- La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.
- Da er $A \equiv D$.

Bevis

- I sannhetsverditabellen for A har vi en kolonne for B, og det er bare verdiene i denne kolonnen vi bruker videre.
- Vi ville fått samme sluttresultat om vi hadde brukt en kolonne for C i stedet for.
- Dette svarer til å sette opp sannhetsverditabellen for D.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi "løse likningen" $A = \mathbf{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.

  Hvis likningen ikke har løsning, så er A en tautologi.
- Hva som er mest hensiktsmessig avhenger av hvordan det sammensatte utsagnet ser ut.

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p)$

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$
- $\neg((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee p$ [Eliminasjon av $\rightarrow$]
- $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee p$ [Bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee p$ [To gangers bruk av DeMorgan]
- $(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg q)) \vee p$ [Distributiv lov]
- $(\neg p \wedge \mathbf{T}) \vee p$ [Invers lov]
- $\neg p \vee p$ [Identitetsloven]
- $\mathbf{T}$ [Invers lov]

Bruk av regneregler

- Vi antydet også at det er mulig å vise at et sammensatt utsagn A er en tautologi ved å vise at likningen

$$A = \mathbf{F}$$

  ikke holder.
- Vi skal gi ett eksempel på hvordan vi kan "løse" slike likninger.
- Metoden kan være nyttig når A har mange forekomster av $\rightarrow$.
- Programmeringsspråket *PROLOG* er basert på en systematisering av denne metoden, koblet med predikatlogikk.

Bruk av regneregler

Eksempel $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) = \mathbf{F}$
2. $p \to q = \mathbf{T}$ (Fra 1.)
3. $(q \to r) \to (p \to r) = \mathbf{F}$ (Fra 1.)
4. $q \to r = \mathbf{T}$ (Fra 3.)
5. $p \to r = \mathbf{F}$ (Fra 3.)
6. $p = \mathbf{T}$ (Fra 5.)
7. $r = \mathbf{F}$ (Fra 5.)
8. $q = \mathbf{F}$ (Fra 4 og 7.)
9. $p = \mathbf{F}$ (Fra 2 og 8)
10. $p \neq p$ (Fra 6 og 9.)

En oppgave

Oppgave

a) Vis at hvis A, B og C er sammensatte utsagn, så vil

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

og at

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A).$$

b) Forklar hvorfor dette betyr at rekkefølge og parentessetting ikke betyr noe i et utsagnslogisk uttrykk som bare bruker bindeordet $\leftrightarrow$

c) [Vanskelig] Hvordan kan vi lett avgjøre om et slikt uttrykk er en tautologi eller ikke?

Oppsummering

- Vi har innført sannhetsverdiene **T** og **F**, begrepet utsagnsvariabel og de utsagnslogiske bindeordene $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$.
- Vi har sett hvordan vi kan undersøke egenskapene til et sammensatt utsagn A ved å skrive ut sannhetsverditabellen til A.
- Et sammensatt utsagn A er en tautologi om A alltid får verdien **T** og A er en kontradiksjon om A alltid får verdien **F**.
- To sammensatte utsagn A og B er logisk ekvivalente om de alltid får den samme sannhetsverdien når vi gir sannhetsverdier til utsagnsvariablene.
- Dette er det samme som at $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.
- Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er logisk ekvivalente.

Oppsummering

- Vi har diskutert konvensjoner for å sette parenteser.
- Rekkevidden til $\neg$ er det nærmeste deluttrykket som kan oppfattes som et utsagn. Vil vi at $\neg$ skal rekke lenger enn til nærmeste utsagnsvariabel, må vi bruke parenteser.
- Rekkevidden til $\wedge$ og $\vee$ går til nærmeste symbol som ikke er $\neg$
- Rekkevidden til $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$ går frem til neste forekomst av $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$, det vil si, forbi $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.
- Vi kan sette $\wedge$ mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, og vi kan sette $\vee$ mellom mer enn to delutsagn uten å bruke parenteser, men bruker vi både $\wedge$ og $\vee$ må vi bruke parenteser for å bestemme hvilket som er hovedkonnektivet.
- Vi må alltid bruke parenteser hvis vi bruker flere $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$ etter hverandre, f.eks. $p \rightarrow q \rightarrow r$.

Oppsummering

Eksempel $(p \to (q \to r))$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p = \mathbf{T}$ og $q \to r = \mathbf{F}$.
- Det betyr igjen at det får verdien **F** nøyaktig når $p = \mathbf{T}$, $q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.

Eksempel $((p \to q) \to r)$

- Dette utsagnet får verdien **F** når $p \to q = \mathbf{T}$ og $r = \mathbf{F}$.
- Dette utsagnet får altså verdien **F** når det første utsagnet får det, men også når $p = \mathbf{F}$ og $r = \mathbf{F}$ (uansett verdi på q.)

Utsagnene er altså ikke logisk ekvivalente.

Vi må bruke parentesene for å skille dem.