MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 7: Logikk, predikatlogikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

10. februar 2009

(Sist oppdatert: 2009-02-11 01:52)

Kapittel 4: Logikk (predikatlogikk)

Predikatlogikk

- Utsagnslogikk er enkel i den forstand at gitt et utsagnslogisk uttrykk er det muligens tidkrevende, men i prinsippet enkelt, å avgjøre om vi står overfor en tautologi, en kontradiksjon eller noe annet.
- Utfordringen i utsagnslogikk er å finne algoritmer som raskt kan løse denne typen problemstillinger for sammensatte utsagn (med mange utsagnsvariable) som forekommer i praktiske anvendelser.
- Utsagnslogikk er også enkel i den forstand at den er uttrykksfattig; det er tilsynelatende mange gyldige logiske slutninger som ikke kan presses inn i formatet til tautologier.
- Vi skal starte med et eksempel.

Predikatlogikk

Eksempel

Anta at vi vet følgende:
- All fluesopp er giftig.
- Det fins sopp som ikke er giftig.

Da konkluderer vi med:
- Det fins sopp som ikke er fluesopp.

Eksempel

Anta at vi vet følgende:
- Alle kvadrattall er $\geqslant 0$.
- Det fins tall som ikke er $\geqslant 0$

Da konkluderer vi med:
- Det fins tall som ikke er kvadrattall.

Dette er det samme argumentet i to forkledninger.

Predikatlogikk

- Da vi innledet utsagnslogikken definerte vi et predikat som en ytring med variable, som ville bli sann eller usann hver gang vi gir variablene verdier.
- I det første eksemplet kan vi betrakte *sopp* som en variabel som kan ta en hvilken som helst sopp som verdi.
- Da blir f.eks. *soppen er giftig* og *soppen er en fluesopp* predikater.
- I det andre eksemplet er *tall* en variabel som kan ta alle hele tall som verdi. Da er *tallet er et kvadrattall* og *tallet er* $\geqslant 0$ predikatene.
- Det gjenstår å betrakte uttrykk som *alle sopper* og *det fins tall* som en del av en utvidet logisk struktur.

Predikatlogikk

Eksempel

- La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en funksjon.
- Hvordan skal vi uttrykke

  f har et minimumspunkt?
- *Løsning*:

  Det fins en $x \in [a, b]$ slik at for alle $y \in [a, b]$ vil $f(x) \leqslant f(y)$.

Det å finne egne symboler for det fins og for alle blir mer og mer påtrengende.

Predikatlogikk

- Vi ser på et eksempel til:

  Det fins ikke noe største primtall
- Vi prøver med litt utsagnslogikk:

  $\neg$*(Det fins et største primtall)*
- Det vil si at det er ikke slik at det fins et primtall som er større eller lik alle primtallene.
- Vi trenger et mer formelt språk for å få orden på dette!

Kvantorer

Definisjon

- Hvis P er et predikat og x er en variabel, vil

$$\exists x P$$

uttrykke at det fins en verdi av x slik at P holder.

$$\forall x P$$

uttrykker at P holder for alle verdier x kan ha.

Vi kaller $\exists$ og $\forall$ for kvantorer, og vi regner dem som en del av det formelle logiske vokabularet.

Kvantorer

Eksempel

a)
$$\exists x(x \in [a,b] \land \forall y(y \in [a,b] \to f(x) \leqslant f(y)))$$
uttrykker at det fins et minimumspunkt for f på $[a,b]$.

b)
$$\neg\exists x(x \text{ primtall} \land \forall y(y \text{ primtall} \to y \leqslant x))$$
uttrykker at det ikke fins et største primtall.

Kvantorer

- Det kan være lurt å øve seg på å skrive uttalelser i dagligtale om til utsagn med kvantorer, men for det meste vil vi bruke kvantorer når vi trenger matematisk presisjon i matematikk eller informatikk.
- Vi skal se på noen eksempler på hvordan man oversetter fra dagligtale til formelt språk og omvendt.
- Flere eksempler fins i læreboka.

Kvantorer

Eksempel

- *Alle hunder har lopper, men ikke alle hunder har lus.*
  $\forall x\ (\text{hund } x \to \exists y(\text{loppe } y \land x \text{ har } y))\land$
  $\neg\forall x\ (\text{hund } x \to \exists y(\text{lus } y \land x \text{ har } y))$
- *Alle har et søskenbarn på Gjøvik.*
  $\forall x \exists y(y \text{ bor på Gjøvik} \land y \text{ er søskenbarn til } x)$
- *Ingen er bedre enn Tor til å fiske laks*
  $\neg\exists x(x \text{ er bedre enn Tor til å fiske laks })$

Kvantorer

Eksempel

- $\forall x \forall y(\exists z(\text{far}(z,x) \land \text{far}(z,y)) \to \text{brødre}(x,y))$
  Hvis to personer har en felles far, er de brødre.
  Dette er selvfølgelig ikke sant, for de kan være søstre.
- $\forall x \exists y(x \text{ har slått } y \land y \text{ har slått } x)$
  La oss si at dette dreier seg om fotballag.
  For alle lag fins det et annet lag slik at de har slått hverandre.
- $\neg\forall x \exists y(y \text{ er bestevennen til } x)$
  Ikke alle har en bestevenn.

Kvantorer

Eksempel

(a) $\exists x \forall y (x \leqslant y)$ (b) $\forall y \exists x (x \leqslant y)$

- Rekkefølgen vi skriver kvantorene i betyr mye for hva utsagnet sier:
  - (a) sier at det fins et minste objekt.
  - (b) sier at det alltid fins et objekt som er mindre eller lik.
- Hvis x varierer over de hele tallene er a) feil, mens b) holder.
- Hvis x varierer over de naturlige tallene, holder a), og b) holder også, fordi for gitt en verdi for y kan vi bruke samme verdi for x.
- Før vi kan bestemme om et utsagn med kvantorer er sant eller usant, må vi vite hvilke mulige verdier variablene kan ta.
- I en programmeringssammenheng vil vi alltid deklarere datatypen til en variabel, og da kan variabelen ta alle verdier i denne datatypen.

Kvantorer

Når er et utsagn med kvantorer logisk holdbart?

La oss betrakte følgende eksempel:

Eksempel

$$\forall x \forall y \forall z ((x < y \land y < z) \to x < z).$$

- Selv om vi ikke har bestemt oss for hvilke verdier x, y og z kan ta, uttrykker dette en sammenheng som vi mener er underforstått når vi bruker symbolet $<$.
  - La x, y og z variere over deltakerne i en sjakkturnering.
  - Hvis S_1 og S_2 er to sjakkspillere, så kan vi si at $S_1 < S_2$ hvis S_1 tapte for S_2 i et parti.
  - Det er ofte at vi kan finne tre spillere som "slår hverandre".
  - I denne situasjonen er utsagnet over *ikke sant*.

Kvantorer

Definisjon

- Et predikat er en ytring

$$P(x_1, \ldots, x_n)$$

  hvor det kan forekomme variable.
- Hvis P er et predikat og x er en variabel, er $\exists x P$ og $\forall x P$ nye predikater hvor variabelen x er bundet.
- Variable som ikke er bundet kalles frie.
- Hvis vi setter inn (lovlige) verdier for de frie variablene i et predikat får vi et utsagn.
- For å bestemme om et utsagn er sant eller usant må vi bestemme variasjonsområdene til alle variablene samt hva andre symboler skal stå for.

Kvantorer

Definisjon (fortsatt)

- En setning er et predikat uten frie variable. Dette kalles også ofte for et lukket utsagn.
- En setning er logisk gyldig dersom den er sann uansett hvilke variasjonsområder vi velger og uansett hva vi lar symbolene bety.

Denne definisjonen er ikke matematisk sett helt presis, men den holder for vårt formål

Kvantorer

Eksempel

- $x < y \to \neg(y < x)$ er et predikat med to frie variable, x og y.
- $\exists x(x < y \to \neg(y < x))$ er et predikat med en fri variabel y og en bunden variabel x.
- $\forall y \exists x(x < y \to \neg(y < x))$ er en setning, fordi begge variablene er bundne.
- For å bestemme om denne setningen er sann eller usann, må vi bestemme oss for hvilke verdier x og y kan ta, og for hva vi mener med $x < y$.
- Hvis vi lar x og y variere over $\mathbb{Z}$ og $<$ være vanlig ordning, kan vi vise at setningen er sann på vanlig matematisk måte.

Kvantorer

Eksempel ($\forall y \exists x(x < y \to \neg(y < x))$)

- Beviset kan formuleres slik;

  La y få en vilkårlig verdi a
  La x også få verdien a.
  Siden $a < a$ er usant, må $\neg(a < a)$ være sant, og sannhetsverdien til

$$x < y \to \neg(y < x)$$

  blir **T** når vi setter inn a for både x og y.
  Merk at a var vilkårlig da vi satte a inn for y, men valgt med omhu da vi satte a inn for x.
- Dette gir oss ingen grunn til å mene at setningen er logisk gyldig.

Kvantorer

- Ved hjelp av læreboka listet vi opp en rekke regneregler for utsagnslogikk.
- Det fins tilsvarende regler for regning med uttrykk med kvantorer.
- En alternativ måte er å isolere noen utsagn i predikatlogikk som aksiomer og fastsette noen regler for hvordan man kan bevise andre utsagn fra disse aksiomene.
- Dette er noe som tas opp på et senere trinn i emner både ved Institutt for Informatikk og ved Matematisk Institutt.
- Vi skal se på et par regneregler som vil være utledbare i en slik logikk, men hvor vi kan overbevise oss om gyldigheten her og nå.
- Vi definerte $\equiv$ som en relasjon mellom utsagnslogiske utsagn, men vil utvide bruken til utsagn med kvantorer, når utsagnene åpenbart er sanne under nøyaktig de samme omstendighetene.

Kvantorer

Eksempel (DeMorgans lover for kvantorer)

For alle utsagn A og variable x vil

1. $\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A$
2. $\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$

- Noen ganger kan det være lettere å argumentere for en abstrakt påstand ved å gi et dekkende eksempel.
- Vi kan argumentere for 1 ved følgende eksempel som dekker alle andre eksempler:
- Vi mener det samme når vi sier
  - Det er feil at alle russere er katolikker.
  - Det fins en russer som ikke er katolikk.
- Vi kan argumentere for 2 ved følgende eksempel:
- Vi mener det samme når vi sier
  - Det fins ingen ærlig politiker.
  - For alle politikere gjelder det at de ikke er ærlige.

Kvantorer

Eksempel (Sammentrekning av kvantorer)

For alle utsagn A og B gjelder

1. $\exists x A \lor \exists x B \equiv \exists x (A \lor B)$
2. $\forall x A \land \forall x B \equiv \forall x (A \land B)$

- Om vi sier

  Det fins en elev i klassen som spiller tennis
  eller det fins en som spiller badminton

  mener vi det samme som om vi sier

  Det fins en elev i klassen som spiller tennis eller badminton.

Kvantorer

- Om vi sier

  Alle arbeiderne fikk høyere lønn
  og alle arbeiderne fikk kortere arbeidstid

  mener vi det samme som om vi sier

  Alle arbeiderne fikk høyere lønn og kortere arbeidstid
- Igjen er disse eksemplene dekkende for den generelle situasjonen.

Kvantorer

- Det er VIKTIG at man ikke trekker $\exists$ over en $\land$ eller en $\forall$ over en $\lor$.

Eksempel (To moteksempler)

- Utsagnet

  Noen Nordmenn er mangemillionærer
  og noen Nordmenn lever under fattigdomsgrensen

  er på formen

$$\exists x M(x) \land \exists x F(x).$$

  Utsagnet

$$\exists x (M(x) \land F(x))$$

  uttrykker at noen Nordmenn både er mangemillionærer og samtidig lever under fattigdomsgrensen.

Kvantorer

Eksempel (To moteksempler, fortsatt)

- Den første påstanden er nok sann, mens den andre er heller tvilsom.
- Det betyr at de to utsagnene ikke er logisk ekvivalente.

Kvantorer

Eksempel (To moteksempler, fortsatt)

- Utsagnet

  Alle barna får tilbud om å stå slalåm eller å gå langrenn

  er på formen

  $$\forall x(S(x) \lor L(x)).$$

  Utsagnet

  $$\forall x S(x) \lor \forall x L(x)$$

  sier at det er det samme tilbudet til alle barna, mens det første utsagnet gir muligheten for at det er et valg.

  Utsagnene er derfor ikke logisk ekvivalente.