

MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 9: Mengdelære

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

17. februar 2009

(Sist oppdatert: 2009-02-17 15:56)



Kapittel 5: Mengdelære

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi skal raskt gå gjennom noen løse tråder fra forrige forelesning.
 - Mer om kvantorer (definisjon av kontinuitet)
 - Relevans for informatikk (litt om PROLOG)
 - Konstruktive bevis
- Noen spørsmål før vi går over til kapittel 5?

Mengder

- De fleste som tar MAT1030 har vært bort i mengder i en eller annen form tidligere.
- I statistikk og sannsynlighetsteori på VGS behandler man **utfallsrom** og studerer matematiske sannsynligheter eller sannsynlighetsfordelinger basert på eksperimenter på slike utfallsrom.
- Man ser på delmengder av slike utfallsrom og eksempelvis Bayes setning, som omhandler både det vi vil kalle **komplement** og det vi vil kalle **snitt** (og med de betegnelse).
- Mengdebegrepet brukes også i de innledende emnene på universitetet, eksempelvis i form av løsningsmengder for ulikheter.

Mengder

- En **mengde** er en samling objekter hvor det er entydig bestemt hvilke objekter som er med i mengden eller ikke.
- Bruken av mengder gjennomsyrrer matematikk og andre teoretiske fag.
- Vi skal lære å bruke mengder slik at vi kan uttrykke oss presist om konstruksjoner og begreper av interesse i informatikk i en vid forstand.
- Vi bruker **klammeparenteser** $\{$ og $\}$ for å beskrive mengder. Vi skal illustrere bruken ved eksempler.

Mengder

Eksempel

- $\{0, 1\}$ er mengden av digitale verdier en bit kan ha.
- $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ er mengden av sannhetsverdier.
- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ er mengden av de 10 minste primtallene.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ er mengden av **naturlige tall**

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.
- Vi sier at vi har gitt mengden på **listeform**.
- I en viss forstand har vi beskrevet \mathbb{N} ved hjelp av en liste. I dette tilfellet er listen uendelig lang, og vi har brukt prikkene \dots for å antyde at opplistingen fortsetter.
- Denne mengden er også gitt på **listeform**.
- Bruker vi listeform med prikker eller tilsvarende, må vi være sikre på at leseren vil oppfatte prikkene på samme måte som forfatteren.
- Hvordan ser mengden $\{1, 5, 15, 34, 65, \dots\}$ ut?
 - Hjelper det å få vite at det er 111?

Mengder

- Vi trenger et eget symbol for å uttrykke at et objekt er et element i en mengde.

Definisjon

- Vi skriver $a \in A$ for å uttrykke at a er et element i mengden A .
- Vi skriver $a \notin A$ for å uttrykke at a *ikke* er et element i A .

- Vi kunne ha skrevet $\neg(a \in A)$ i stedet for.
- Det er ikke uvanlig å bruke $/$ som nektingsymbol, som i $3 \not\leq 2$ og $4 \neq 3$.

Mengder

- Hvis vi skal beskrive noen mer kompliserte mengder, må vi bruke et litt annet format enn listeform.
- Dette illustreres best ved noen eksempler.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ kan deles på } 5\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ er et primtall}\}$

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 5k)\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \forall m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}(n = km \rightarrow k = 1 \vee m = 1)\}$

Mengder

- Noen mengder vil vi referere til så ofte at vi bruker egne symboler for dem.
- Vi har allerede sett at vi bruker \mathbb{N} for mengden av naturlige tall.
- Vi lar $\mathbb{J} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ være mengden av **hele tall**.
Her følger vi boka, men internasjonalt (og i Norge) er det mer vanlig å bruke \mathbb{Z} for denne mengden.
- Vi lar \mathbb{R} stå for mengden av alle reelle tall.
Det er så mange reelle tall at vi vanskelig kan liste dem opp, ikke engang ved hjelp av \dots .
- Vi lar \mathbb{Q} betegne mengden av rasjonale tall.

Mengder

- Det er mulig å definere \mathbb{Q} fra de andre mengdene.

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{J} \exists q \in \mathbb{N} (x = \frac{p}{q})\}.$$

- I en viss forstand er det umulig å definere \mathbb{N} utfra \mathbb{R} alene.
 - Den forstanden faller langt utenfor pensum i MAT1030.
- Vi har allerede truffet på endel mengder i dette emnet, uten å legge vekt på at de er mengder.

Mengder

Eksempel

- La VAL_k være mengden av fordelinger av sannhetsverdier **T** og **F** på k utsagnsvariable p_1, \dots, p_k .
- La var være en uendelig mengde $\{p_1, p_2, \dots\}$ av utsagnsvariable.
Vi kan arbeide med denne mengden uten å vite nøyaktig hva disse variablene er, det holder at vi har **navn** for dem.
- La $REP_{\mathbb{R}}$ være mengden av digitale representasjoner av reelle tall, og la $REP_{\mathbb{J}}$ være mengden av binære representasjoner av hele tall.
- Da vi snakket om hvordan vi skulle “forstå” kvantorer $\exists x$ og $\forall y$, sa vi at vi måtte presisere hvilke verdier x og y kan ta.
Dette kan vi gjøre mer presist ved å snakke om **variasjonsmengden** eller **tolkningsområdet** til den enkelte variable som en mengde.

Mengder

- Senere skal vi se på **datastrukturer** som mengder.
- En datastruktur vil bestå av de objektene en variabel i et program kan ta som verdi.
- Vi har tidligere nevnt at vi ofte må deklare **typen** til en variabel.
- Dette betyr at vi må avgrense den delen av datastrukturen som den aktuelle variabelen kan hente sine verdier fra.
- For å kunne beskrive datastrukturer, datatyper og for å kunne diskutere hvordan, og i hvilket omfang, objektene i slike strukturer kan representeres som digitalisert informasjon, trenger vi et grunnlag i mengdelære.
- Det er dette grunnlaget vi skal få når vi gjennomgår stoffet i Kapittel 5.

Mengder

- Vi skal ikke kaste oss inn i den filosofiske diskusjonen om hva en **mengde** er i noen større grad enn i diskusjonen om hva et tall er for noe.
- Det viktigste for oss er å forstå hvordan vi bruker mengder til å uttrykke oss presist.
- Hvis man noen gang har tenkt til å diskutere teorigenstander med noen andre, er det viktig at man har den samme forståelsen.
- En viktig del av denne forståelsen er å vite når to mengder er like.

Mengder

Definisjon

To mengder A og B er **like** hvis de har nøyaktig de samme elementene.

- Det betyr at mengden er fullstendig bestemt av sine elementer, og det betyr ikke noe hvordan vi beskriver dem.

Mengder

Eksempel

- $\{2, 3, 4\} = \{3, 4, 2\} = \{2, 2^2, 3\} = \{1 + 1, 2, 2 + 1, 3, 3 + 1, 2 + 2, 4\}$
- $\{3, 4, 7\} = \{\text{III}, \text{IV}, \text{VII}\}$ så lenge det er klart at vi bruker arabiske og romerske måter å uttrykke tall på, mens hvis vi snakker om de konkrete symbolsekvensene er mengdene forskjellige.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 = 25\} =$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{3x}{5}\right)^2 + \left(\frac{4y}{5}\right)^2 = 1\}.$$

Mengder

Eksempel (Tre “dumme” oppgaver)

- Finn

$$\{x \in \mathbb{R} : x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 0\}$$

- Bestem mengden av sannhetsverdifordelingen som gjør

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

sann.

- Finn mengden av flytende-punkt representasjoner av det reelle tallet 0.

- Felles for alle disse tre oppgavene er at mengdene ikke har noen elementer.
- Alle løsningsmengdene har nøyaktig de samme elementene, nemlig ingen, og er derfor like.

Mengder

Definisjon

Vi lar \emptyset betegne **den tomme mengden**, det vil si mengden som ikke har noen elementer.

- Symbolet \emptyset er internasjonalt gjennomført, og man vil ikke finne det forklart andre steder enn i innføringstekster i mengdelære.
- Det er fremkommet ved en “null” med en strek over, og må ikke forveksles med noen bokstav i noe alfabet.
- Vi har at $\emptyset \neq \{\emptyset\}$; den første mengden har ingen elementer mens den andre har ett element, nemlig \emptyset selv.

Mengder

- Vi har tidligere sagt at når vi bruker en variabel i en programmeringssammenheng, må vi deklare *typen* til variabelen. (Ikke alltid sant; det kan avhenge av programmeringsspråket, men for de fleste ikke-spesialiserte språk er det tilfelle.)
- Alternativt arbeider vi med en **datastruktur** hvor vi henter alle variabelverdier fra.
- Vi har ofte definert mengder som $\{n \in \mathbb{N} : \dots\}$ eller $\{x \in \mathbb{R} : \dots\}$. I slike tilfeller er det ofte klart fra sammenhengen hvilke mengder n eller x skal hentes fra, og det kan være brysomt å måtte presisere det hver gang.
- Hvis A er en mengde, og vi vil se på mengden av objekter som ikke er med i A , vil vi normalt ønske å avgrense oss til de objektene som er av interesse i den aktuelle sammenhengen.
- Alt dette gjør det aktuelt å innføre et eget symbol for en **universell mengde**, uten at denne universelle mengden trenger å være den samme i enhver sammenheng.

Mengder

Definisjon

- Vi lar \mathcal{E} stå for **den universelle mengden**.
- \mathcal{E} vil betegne forskjellige mengder i forskjellige sammenhenger, men skal ligge fast i enhver gitt sammenheng.
- I noen sammenhenger (definisjoner, oppgaver) vil \mathcal{E} bare betegne en vilkårlig universell mengde, mens i andre sammenhenger vil betydningen av \mathcal{E} bli presisert.

Mengdealgebra

- Vi skal nå se på noen grunnleggende operasjoner på mengder.
- Disse kalles **Boolske operasjoner**.
- Det er en nær sammenheng mellom Boolske operasjoner og utsagnslogiske bindeord.
- Utsagnslogikk og Boolsk mengdelære er begge instanser av det som kalles **Boolsk algebra**.
- Et mer systematisk studium av Boolsk algebra er relevant for retninger innen teoretisk informatikk.

Mengdealgebra – union

Eksempel

- Vi har fått i oppgave å finne en digital representasjon av funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

- og vet at denne funksjonen bare er definert når $|x| \geq 1$.
- Det betyr at vi må finne mengden av 32-bit representasjoner av tall ≥ 1 og av tall ≤ -1 og så slå disse mengdene sammen.
- En slik sammenslåing kaller vi en **union**.

Mengdealgebra – union

Definisjon

- Hvis A og B er to mengder, definerer vi **unionen** av A og B som

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

- Unionen av A og B består altså av de objektene som er element i minst en av de to mengdene A og B, men også gjerne i begge.

Mengdealgebra – union

Eksempel

- \mathbb{N} er unionen av mengdene av positive partall og positive oddetall.
- Løsningsmengden til ulikheten $x^2 > 1$ er

$$\{x : x < -1\} \cup \{x : x > 1\}.$$

- Mengden av bitsekvenser som representerer tall x med $|x| \geq 1$ kan skrives som

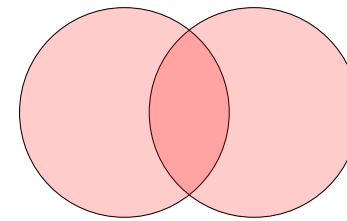
$$\{01\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^{30}\} \cup \{11\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^{30}\}$$

hvor $\{0, 1\}^{30}$ er en vanlig måte å uttrykke mengden av 30-bits sekvenser.

Mengdealgebra – union

- En vanlig måte å illustrere Boolske operasjoner på er ved å bruke **Venndiagrammer**.
- Et Venndiagram for en Boolsk kombinasjon av to eller tre mengder vil bestå av en sirkel for hver mengde, slik at de overlapper hverandre.
- Hvis vi har bruk for å markere den universelle mengden \mathcal{E} , gjør vi det ved et rektangel som omslutter alle sirklene.
- Ved å bruke forskjellige skraveringer, kan vi illustrere hvilke punkter som ligger i mengden og hvilke som ikke gjør det.

Mengdealgebra – union



$A \cup B$

- Vi har en sirkel for hver mengde.
- Vi har fire felter, et for hver kombinasjon av $x \in A$ og $x \in B$.
- Hele det fargede området markerer $A \cup B$.

Mengdealgebra – snitt

Eksempel

- La A være mengden av naturlige tall n slik at n kan deles på både 6 og 8.
- La B være mengden av reelle tall x slik at

$$((x-1)^2 - 1)^2 + (x^4 - 16)^4 = 0$$

- La C være mengden av 8-bits representasjoner av ikke-negative partall på vår lekemaskin.
- I tilfelle A gir vi to krav direkte.
- I tilfelle B krever vi at vi både må ha at $(x-1)^2 - 1 = 0$ og at $x^4 - 16 = 0$.
- I tilfelle C krever vi at bitsekvensen både må starte med 0 og ende med 0.

Mengdealgebra – snitt

Definisjon

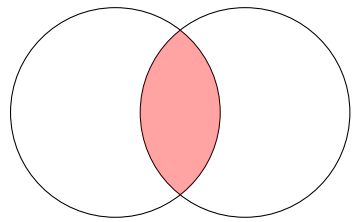
- La A og B være to mengder.
- Med **snittet** av A og B mener vi

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

- $A \cap B$ består altså av de objektene som er elementer **både** i A og i B.

Vi kan også illustrere snitt ved et Venndiagram.

Mengdealgebra – snitt



$A \cap B$

- Vi farger eller skraverer det feltet som markerer fellesdelen av de to mengdene.

Mengdealgebra – snitt

Eksempel

- Hvis

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

er $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, mens $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

- Hvis

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

er $A \cup B$ hele planet, mens $A \cap B$ er mengden av punkter på enhetssirkelen.

Mengdealgebra – komplement

- Vi har ikke hatt bruk for den universelle mengden \mathcal{E} i definisjonen av **union** og **snitt**.
- Vi har formulert definisjonen av \cup og \cap slik at sammenhengen med \vee og \wedge skal komme klart frem.
- Den neste mengdeoperasjonen vi skal se på er **komplement**.
- Den vil ha et nært slektskap til \neg .
- For å definere komplement må vi ha tilgang til en universell mengde.

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

1. La P betegne mengden av primtall.

Et **sammensatt tall** er et naturlig tall $\neq 1$ som ikke er et primtall.

Vi kan definere

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \notin P \cup \{1\}\}.$$

Det hadde vært enklere om vi kunnet skrive dette på en kortere måte som vi alle kunne forstå.

Mengdealgebra – komplement

Eksempel (Fortsatt)

2. Vi definerer de **irrasjonale tallene** som mengden av de reelle tallene som ikke er rasjonale.

Dette kunne vi skrevet som

$$\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Hvis alle forstår oss om vi skriver $\overline{\mathbb{Q}}$ istedenfor, ville det vært greiere.

Mengdealgebra – komplement

Eksempel (Fortsatt)

3. Vi har ord både for partall og for oddetall, men vi har ikke et eget ord for tall som ikke kan deles på 13 (eller 17 for den saks skyld). I denne sammenhengen var det klart at vi snakker om hele tall, dvs

$$\mathcal{E} = \mathbb{J}.$$

Vi vil si at mengden av tall som ikke kan deles på 13 er **komplementet** til mengden av tall som kan deles på 13, og vi markerer komplementet til en mengde ved å sette en strek over uttrykket for mengden.

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

La \mathcal{E} være en universell mengde og la A være en mengde hvor alle elementene ligger i \mathcal{E} .

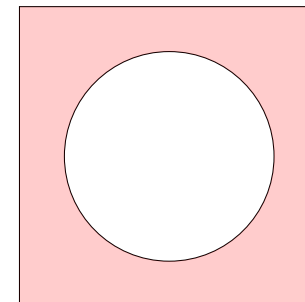
Med **komplementet** til A mener vi

$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\} = \{x \in \mathcal{E} : \neg(x \in A)\}.$$

Når vi skriver \overline{A} skal det alltid være klart at \mathcal{E} er kjent (eller at vi arbeider generelt med en vilkårlig \mathcal{E} .)

Vi kan beskrive komplementet ved et Venndiagram.

Mengdealgebra – komplement



\overline{A}

- Det fargede/skraverte feltet markerer komplementet.

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

- Hvis $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og $A = \{2, 3, 5\}$, er $\bar{A} = \{0, 1, 4, 6, 7\}$.
- Hvis \mathcal{E} er som over og $B = \{1, 3, 5, 7\}$, er $\bar{B} = \{0, 2, 4, 6\}$
- Hvis $\mathcal{E} = \mathbb{J}$ og $B = \{1, 3, 5, 7\}$ er

$$\bar{B} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}.$$

Mengdealgebra – mengdedifferens

- Den siste mengdeoperasjonen vi skal innføre er **mengdedifferens**.

Definisjon

Hvis A og B er to mengder, er **differansen** A minus B definert ved

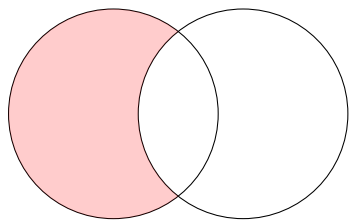
$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Vi bruker ofte betegnelsen **mengdedifferens**

En alternativ skrivemåte mye brukt i litteraturen er $A \setminus B$.

Vi kan også illustrere mengdedifferens ved et Venndiagram.

Mengdealgebra – mengdedifferens



$$A - B$$

- Det fargede/skraverte området markerer differensen
- Vi har ikke hatt bruk for \mathcal{E} her.
- $A - B = A \cap \bar{B}$

Venndiagrammer

- Den virkelige nytten av Venndiagrammer ligger i at de kan brukes til å studere sammenhengen mellom forskjellige Booleske uttrykk.
- I en viss forstand er bruk av Venndiagrammer en parallell til bruk av sannhetsverditabeller.
- Vi skal vise noen eksempler på tavlen på hvordan vi kan etablere mengdeteoretiske identiteter ved hjelp av Venndiagrammer.

Venn diagrammer

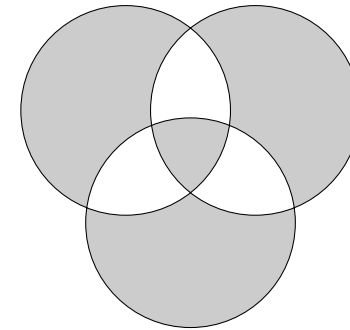
Oppgave

Vi definerer ofte *symmetrisk differens* ved

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

- Illustrer $A \triangle B$ ved et Venn diagram.
- Vis at $(A \triangle B) \triangle C$ kan illustreres ved Venn diagrammet på neste side.
- Drøft hvorfor dette viser at vi kunne skrevet $A \triangle B \triangle C$ uten bruk av parenteser.

Venn diagrammer



$$(A \triangle B) \triangle C$$