MAT1030 – Diskret Matematikk

Plenumsregning 10: Ukeoppgaver

Mathias Barra

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

20. mars 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-30 09:38)

Oppgave 6.1

Avgjør hvorvidt følgende funksjoner er veldefinerte. For de som er veldefinerte, gi definisjonsområdet, verdiområdet og bildemengden. [Se læreboken på side 107.]

Løsning

	Veldefinert?	Definisjonsområde	Verdiområde	Bildemengde
(a)	Ja	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
(b)	Nei, $g(1)$ er ikke i $\mathbb{J}$.			
(c)	Nei, $h(3) = 4$ er ikke i $\{1, 2, 3\}$.			
(d)	Ja	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
(e)	Ja	$\mathbb{R}$-$\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$-$\{0\}$
(f)	Nei, $ispositive(0)$ er ikke definert.			
(g)	Ja	$\mathbb{N}$	$\mathbb{J}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
(h)	Nei, $\psi(a)$ er den tomme strengen og er ikke med i S.			

Oppgave 6.2

Avgjør hvorvidt følgende funksjoner er:
(i) *på* (eller *surjektiv*. Engelsk: *onto* eller *surjective*)
(ii) *en-til-en* (*1–1* eller *injektiv* Engelsk: *one-to-one injective*) [Se læreboken på side 107.]

Løsning 6.2

(x)	1–1?
	På?
(a)	Ja: $f(w) = f(w') \Rightarrow f(f(w))w = w' = f(f(w'))$
	Ja: $f \circ f = \mathsf{I}$
(b)	Nei: $g(4,4) = 8 = g(3,5)$
	Ja: $x = g(x, 0)$
(c)	Ja: $n + 1 = n' + 1 \Rightarrow n = n'$
	Nei:$n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0 \notin \mathbf{N}$
(d)	Nei: $h(\text{on}) = h((\text{of}))$
	Ja: a,be,. . . ,xenophobe,you,zoo?
(e)	Ja!
	Ja! $0 \notin \mathbf{N}$ og 'non-null'
(f)	Nei: (Med mindre $A = \{a\}$ eller $A = \emptyset$)
	Nei: $\mathbf{N}$ er uendelig

Oppgave 6.3

Definer en funksjon $f:\{1,2,3,4,5\} \to \{0,1,2,3,4\}$ ved ‘$f(n)$ er resten man får når man deler $3n$ på 5’. Tegn en fremstilling av f ved et pildiagram, og avgjør på bakgrunn av diagrammet om f er på og om f er 1–1.

Løsning

[På Tavle]

Oppgave 6.4

Anta man har en kode/idenitfikajonsnummer som består av ni siffer $x_1 x_2 \cdots x_9$ avluttet med et tiende test-siffer $x_{10} = x_1 + x_2 \cdot 2 + \cdots + x_9 \cdot 9$.

(a) Vis at 2516238674 er en gyldig kode.

(b) La X være mengden av alle sekvenser med ni siffer, la Y være mengden av siffere, og la $f : X \to Y$ være definert ved $sf(s)$ er en gyldig kode. (Hvorfor er denne veldefinert?) Forklar hvorfor f er/ikke er 1–1, og hvorfor den er/ikke er på.

(c) Anta at man har tastet inn en kode feil: *vil test-sifferet alltid oppdage dette?* Forklar ved hjelp av svaret du gav under (b).

Løsning 6.4

(a) Gjør det selv!

(b) Funksjonen er helt klart *på*. Ved å variere x_1 fra 0 til 9 endres summen med 1 hver gang treffer hvert siffer i Y nøyaktig én gang. Den er *ikke* 1–1 av samme grunn.

(c) Nei, test-sifferet vil ikke alltid oppdage det , f.eks. vil man få samme test-siffer for $(x_1 + 2)(x_2 - 1)s$ og $x_1 x_2 s$ (der s gjør $x_1 x_2 s$ til en gyldig sekvens).

Oppgave 6.6

Finn inversen til hver av funksjonene hvis de eksisterer, eller forklar hvorfor den ikke finnes [Se s. 108].

Løsning

(x)	Eksistens av invers? Uttrykk
(a)	Ja! $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$
(b)	Nei! $\lvert -1 \rvert = \lvert 1 \rvert$, dermed er abs ikke 1–1.
(c)	Ja! $g^{-1}(x) = \begin{cases} n+1 & , n = 2m+1 \\ n-1 & , n = 2m \end{cases}$
(d)	Ja! h^{-1} flytter første symbol til slutten av strengen.

Oppgave 6.7

Vi har følgende funksjoner, der X er mengden av studenter i en universitetsdatabase og Y er mengden av ID-numre til studentene, $f : X \to Y$, '$f(x)$ er ID nummeret til student x', $g : Y \to \mathbf{N}$, '$g(y)$ er alderen (i hele år) til studenten med ID-nummer y'.

(a) Beskriv $g \circ f$ og f^{-1}.

(b) Forklar hvorfor g^{-1} ikke eksisterer.

Løsning

(a) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ som er alderen til studenten med ID-nummer $f(x)$, altså x selv. $f^{-1}(y)$ er studenten med ID-nummer y.

(b) Kort svar: vi har ikke vilkårlig gamle studenter. Lengre svar: Her vil vi imidlertid høyst sannsynlig heller ikke ha 1–1-egenskapen, så vi kan ikke fikse dette ved å restriktere ko-domenet heller.

Oppgave 6.8

Funksjonene upr og lwr, begge $O \to O$ der O er mengden av ord skrevet med $\{$a,A,b,B,$\ldots$,å,Å$\}$, returnerer henholdsvis en streng der alle små er byttet ut med store bokstaver, og en streng der store er byttet ut med små bokstaver. Hva er $\mathit{upr} \circ \mathit{lwr}$? Beregn f.eks. $(\mathit{upr} \circ \mathit{lwr})$(Hans Hansen).

Løsning

[Muntlig/På tavle]

Oppgave 6.10

Digital rot-funksjonen $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ (Se oppgave 8. Kapittel 1. s. 13).

(a) Er f 1–1 eller på?

(b) Eksisterer f^{-1}?

(c) Eksisterer $f \circ f$?

Løsning

I pseudo-koden for digital-rot, trenger vi kun å legge merke til at while-løkken forsetter helt til n'en som skal brukes som output har *ett* siffer. Dermed Blir svaret Nei på (a) og (b).
For å svare på (c) trenger vi *kun* å kikke på signaturen til f, som er oppgitt å være $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Altså eksisterer $f \circ f$. Hvis vi undersøker koden for f litt nøyere, ser vi at $f \circ f = f$, siden while-løkken ikke vil starte siden n alt har ett siffer.

Oppgave 6.11

Vis at

$$F_v \overset{\text{def}}{=} h \circ (g \circ f) \overset{?}{=} (h \circ g) \circ f \overset{\text{def}}{=} F_h \quad .$$

Altså, vis at $h \circ (g \circ f)$ er veldefinert hvis og bare hvis $(f \circ g) \circ h$ er veldefinert, og at de to uttrykkene definerer samme funksjon.

Løsning

For at uttrykket skal vre veldefinert, ser vi at det må eksistere mengder A, B, C og D slik at $f : A \to B, \; g : B \to C, \; h : C \to D$. Da, og bare da, vil begge sidene i uttrykket definere funksjoner $F_v, F_h : A \to D$. For å sjekke om $F_v = F_h$ kan vi f.eks. sjekke om $F_v(x) = F_h(x)$ for vilkårlig $x \in A$. Vi får:

$$F_v(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = F_h(x)$$

som viser at funksjonene er den samme.