MAT1030 – Plenumsregning 11

Ukeoppgaver

Mathias Barra - 27. mars 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-30 09:39)

Oppgave 7.6

Finn en rekursiv og en ikke-rekursiv definisjon av sekvensen

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots$$

Løsning

- En rekursiv definisjon er slik:
  - $f(1) = 2$
  - $f(n+1) = f(n) + 5$
- En ikke-rekursiv definisjon er slik:
  - $g(n) = 5n - 3$

Oppgave 7.7

Første element i en følge er 1, og hvert påfølgende element fremkommer ved *å doble det forrige, for så å legge til* 3.
Skriv en rekursiv definisjon av følgen.

Løsning

La oss kalle følgen $f(n)$. Da blir $f(1) = 1$. Gitt $f(n)$ blir $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 3$. Løsningen blir altså:

$$f(1) = 1 \text{ og } f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 3 \ .$$

Oppgave 7.9

Uten å bruke kalkulator, beregn eller forenkl følgende uttrykk:

(a) $\frac{25!}{24!}$
(b) $\frac{11!}{8!}$
(c) $\frac{10!}{7!3!}$
(d) $\frac{n!}{(n-2)!}$

Løsning

(a) $\frac{25!}{24!} = \frac{(24+1)!}{24!} = \frac{(24+1)\cdot 24!}{24!} = 25$
(b) $\frac{11!}{8!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot (8!)}{8!} = 990$
(c) $\frac{10!}{7!3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$
(d) $\frac{n!}{(n-2)!} = n^2 - n$

Oppgave 7.12 (b)

Vis ved induksjon at følgende påstand er sann for alle naturlige tall n.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Løsning

Vi viser først at påstanden holder for $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Løsning

Vi antar så at påstanden holder for k (det er vår induksjonshypotese) og viser at den holder for

$k+1$.

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \qquad \text{(ved induksjonshypotesen)}\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)(k+1)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}\\
&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Oppgave 7.12 (c)

Vis ved induksjon at følgende påstand er sann for alle naturlige tall n.

$$n^3-n \text{ er delelig med } 3$$

Løsning

Vi viser først at påstanden holder for $n=1$.

$$1^3-1=0 \text{ er delelig med } 3$$

Løsning

- Vi antar så at påstanden holder for k.
- Det er *induksjonshypotesen*.
- Vi viser så at påstanden holder for $k+1$.
- Induksjonshypotesen sier i dette tilfellet at k^3-k er delelig med 3.
- Vi kan derfor anta at det fins et naturlig tall a slik at $k^3-k=3a$.

$$\begin{aligned}
(k+1)^3-(k+1)&=(k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)\\
&=k^3-k+3k^2+2k+k \quad \text{Lite trick!}\\
&=(k^3-k)+3k^2+3k\\
&=3a+3(k^2+k) \qquad \text{(ved ind.hyp.)}\\
&=3(a+k^2+k)
\end{aligned}$$

- Da må $(k+1)^3 - (k+1)$ være delelig på 3 og påstanden holder.

Oppgave 7.14

Bevis ved induksjon:

(a) $\sum_{i=1}^{n}(4i-1) = n(2n+1)$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$.

Løsning

(a) Induksjonsstart (n=1): $\sum_{i=1}^{1}(4i-1) = 4-1 = 3 = (2+1)$. OK! Induksjonsskritt (n+1): $\sum_{i=1}^{n+1}(4i-1) = n(2n+1) + 4(n+1) - 1 = 2n^2 + n + 4n + 3 = (n+1)(2(n+1)+1)$ OK!

(b) Induksjonsstart (n=1): $\sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 0 = 1-1 = 2^0 - 1$ OK! Induksjonsskritt (n+1): $\sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} = (2^n - 1) + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$. OK!

Oppgave 7.15

La $t(n)$ være definert ved $t(1) = 2$ og $t(n) = t(n-1) + 3n - 1$ $(n > 1)$. Bevis ved induksjon at $t(n) = \frac{n(3n+1)}{2}$.

Løsning

Induksjonsstart $(n = 1)$: $t(1) = 2$ pr. definisjon. Vi ser også at

$$\frac{1(3+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ OK!}$$

Induksjonsskritt (n+1):

$$t(n+1) = t(n) + 3(n+1) - 1 = \frac{n(3n+1)}{2} + 3(n+1) - 1 =$$

$$\frac{n(3n+1) + 6(n+1) - 2}{2} = \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2} \text{ OK!}$$

Oppgave 7.16

La $t(n)$ være definert ved $t(1) = 1$ og $t(n) = t(n-1) + n \cdot n!$ $(n > 1)$. Bevis ved induksjon at $t(n) = (n+1)! - 1$.

Løsning

Induksjonsstart $(n = 1)$: $t(1) = 1$ pr. definisjon. Vi ser også at

$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1 \ \text{ OK!}$$

Induksjonsskritt (n+1):

$$t(n+1) = t(n) + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! =$$

$$(n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1 \ \text{ OK!}$$

Oppgave 7.17

Betrakt følgende induktivt definerte følge (omformulert til $n+1$):

$$t(1) = 2 \text{ og } t(n+1) = t(n) + 2n + 1 \ .$$

Beregn noen følgeledd, finn et lukket uttrykk for $t(n)$, og bevis det ved induksjon.

Løsning

Vi beregner noen ledd: Tenke, tenke, tenke, tenke... AHA!

1	2	3	4	5	6	...
2	7	14	23	34	47	...
$4-2$	$9-2$	$16-2$	$25-2$	$36-2$	$49-2$	...
2^2-2	3^2-2	4^2-2	5^2-2	6^2-2	7^2-2	...

Vi gjetter $t(n) = (n+1)^2 - 2$ – $t(1) = (1+1)^2 - 2 = 2$. Vi ser og at $t(n+1) = (n+1)^2 - 2 + 2(n+1) + 1 = (n+2)^2 - 2$, som var det vi skulle vise.

Oppgave 7.18

Anta at vi kan bevise (i) $A(5)$ og (ii) $\forall_{x \in \mathbb{N}}(A(x) \to A(x+1))$, der $A(x)$ er et eller annet utsagn om naturlige tall.
For hvilke tall n kan vi vite at $A(n)$ er sann?

Løsning

Svaret er $\{5, 6, 7, 8, \ldots\}$.
For et mer generellt eksempel, la p være et primtall, og la $A_p(x) = p|x!$, dvs. ‘p deler x fakultet.
Vi kan enkelt vise at $p|p!$, dvs. $A_p(p)$, og hvis $p|n!$ – dvs. $A_p(n)$ – så vil $(n+1)! = (n+1)n! = (n+1) \cdot p \cdot k$ for en passende k Altså $A_p(n+1)$: vi har nå vist at $A_p(n) \to A_p(n+1)\ldots$
Men p deler *ikke* $n!$ når $n < p$, siden $n = k \cdot p$ for $k \in \mathbb{N}$ tilsier at $n \geqslant \frac{n}{k} = p > n$: dvs. $n > n$, en selvmotsigelse!!

Oppgave 7.20

(Om å gjøre induksjonsbevis ved å starte med $n = 0$.)

(a) Bevis at $(6^n - 1)/5$ er et heltall for $n \geqslant 0$, ved å bruke $n = 0$ som induksjonsstart.

(b) Forklar problemet ved å vise at $2^n > n$ for $n \geqslant 0$ ved induksjon hvor $n = 0$ er induksjonsstarten.

(c) Bruk induksjon på en annen måte for å vise at $2^n > n$ for $n \geqslant 0$.

Løsning (a)

Induksjonsstarten er å vise at $\frac{6^n-1}{5}$ er et heltall for $n = 0$:

$$\frac{6^n - 1}{5} = \frac{6^0 - 1}{5} = \frac{1-1}{5} = 0 \text{ er et heltall}$$

Løsning (a)

Induksjonsskrittet er å vise at hvis $\frac{6^k-1}{5}$ er et heltall, så er $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ et heltall.

- Vi antar at $\frac{6^k-1}{5}$ er et heltall.
- Vi skal komme frem til at $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ er et heltall.

- La oss gange hele uttrykket med 6.
- Da får vi også et heltall, $\frac{6(6^k-1)}{5}$.
- Da må $\frac{6^{k+1}-6}{5}$ være et heltall.
- Men, $\frac{6^{k+1}-6}{5} = \frac{6^{k+1}-1}{5} - \frac{5}{5}$.
- Da må også $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ være et heltall

Løsning (b)

"Forklar problemet ved å vise at $2^n > n$ for $n \geqslant 0$ ved induksjon hvor $n = 0$ er induksjonsstarten."

- La oss forsøke!
- Induksjonsstarten er å vise at $2^n > n$ holder for $n = 0$.
- Det er greit, for vi har $2^0 = 1 > 0$
- Induksjonsskrittet begynner med å anta at $2^n > n$ holder for $n = k$.
- Induksjonshypotesen er derfor at $2^k > k$.
- Vi må vise at $2^n > n$ holder for $n = k+1$, det vil si at $2^{k+1} > k+1$.
- Ved å multiplisere med 2 på begge sider, får vi $2^{k+1} > 2k$.
- Hvis $2k \geqslant k+1$ holder, så er vi i mål, siden $2^{k+1} > 2k \geqslant k+1$.
- Men, $2k \geqslant k+1$ holder kun hvis $k > 0$!
- (For hvis $k = 0$, så vil $2k = 0$ og $k+1 = 1$.)

Løsning (c)

'Bruk induksjon på en annen måte for å vise at $2^n > n$ for $n \geqslant 0$.'

- Induksjonsstarten er den samme: $2^0 = 1 > 0$
- Vi viser induksjonsskrittet på en annen måte.
- Vi antar på samme måte at $2^n > n$ holder for $n = k$.
- Vi må vise at $2^n > n$ holder for $n = k+1$, det vil si at $2^{k+1} > k+1$.
- Induksjonshypotesen gir at $2^k > k$.
- I stedet for å gange med 2 på begge sider, kan vi *summere* med 2^k på begge sider.
- Vi får da $2^k + 2^k > k + 2^k$.
- Vi har at $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, så $2^{k+1} > k + 2^k$.
- Vi har at $2^k \geqslant 1$, så $k + 2^k \geqslant k+1$.
- Vi får dermed at $2^{k+1} > k+1$.

Oppgave 7.23

Løs følgende rekurrenslikninger

(a) $t(n) - 5t(n-1) + 4t(n-2) = 0$, $t(1) = 2$, $t(2) = -1$

Løsning

- Den karakteristiske likningen til likningen er $x^2 - 5x + 4 = 0$.
- Vi faktoriserer til $(x-1)(x-4) = 0$.
- $x = 1$ og $x = 4$ er løsninger av denne likningen.
- Den generelle løsningen til rekurrenslikningen er $t(n) = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n = A + B \cdot 4^n$
- $t(1) = 2$ gir $A + 4^1 B = 2$
- $t(2) = -1$ gir $A + 4^2 B = A + 16B = -1$
- Vi får $2 - 4B = -1 - 16B$ og $3 = -12B$ og $B = -\frac{1}{4}$
- Ved å sette inn $B = -\frac{1}{4}$ i $A + 4B = 2$ får vi $A = 3$.
- Løsningen er derfor $t(n) = 3 + (-\frac{4^n}{4}) = 3 - 4^{n-1}$.