

MAT1030 – Diskret Matematikk

Plenumsregning 11: Ukeoppgaver

Mathias Barra

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

27. mars 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-30 09:39)



Oppgave 7.6

Finn en rekursiv og en ikke-rekursiv definisjon av sekvensen

2, 7, 12, 17, 22, 27, ...

Løsning

- En rekursiv definisjon er slik:
 - $f(1) = 2$
 - $f(n + 1) = f(n) + 5$
- En ikke-rekursiv definisjon er slik:
 - $g(n) = 5n - 3$

Oppgave 7.7

Første element i en følge er 1, og hvert påfølgende element fremkommer ved å doble det forrige, for så å legge til 3. Skriv en rekursiv definisjon av følgen.

Løsning

La oss kalle følgen $f(n)$. Da blir $f(1) = 1$. Gitt $f(n)$ blir $f(n + 1) = 2 \cdot f(n) + 3$. Løsningen blir altså:

$$f(1) = 1 \text{ og } f(n + 1) = 2 \cdot f(n) + 3 .$$

Oppgave 7.9

Uten å bruke kalkulator, beregn eller forenkl følgende uttrykk:

(a) $\frac{25!}{24!}$

(b) $\frac{11!}{8!}$

(c) $\frac{10!}{7!3!}$

(d) $\frac{n!}{(n-2)!}$

Løsning

(a) $\frac{25!}{24!} = \frac{(24+1)!}{24!} = \frac{(24+1) \cdot 24!}{24!} = 25$

(b) $\frac{11!}{8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (8!)}{8!} = 990$

(c) $\frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$

(d) $\frac{n!}{(n-2)!} = n^2 - n$

Oppgave 7.12 (b)

Vis ved induksjon at følgende påstand er sann for alle naturlige tall n .

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Løsning

Vi viser først at påstanden holder for $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Løsning

Vi antar så at påstanden holder for k (det er vår induksjonshypotese) og viser at den holder for $k + 1$.

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \quad (\text{ved induksjonshypotesen}) \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)(k + 1)}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(k(2k + 1) + 6(k + 1))}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2(k + 1) + 1)}{6} \end{aligned}$$

Oppgave 7.12 (c)

Vis ved induksjon at følgende påstand er sann for alle naturlige tall n .

$$n^3 - n \text{ er delelig med } 3$$

Løsning

Vi viser først at påstanden holder for $n = 1$.

$$1^3 - 1 = 0 \text{ er delelig med } 3$$

- Vi antar så at påstanden holder for k .
- Det er *induksjonshypotesen*.
- Vi viser så at påstanden holder for $k + 1$.
- Induksjonshypotesen sier i dette tilfellet at $k^3 - k$ er delelig med 3.
- Vi kan derfor anta at det fins et naturlig tall a slik at $k^3 - k = 3a$.

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 - (k + 1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k + 1) \\ &= k^3 - k + 3k^2 + 2k + k \quad \text{Lite trick!} \\ &= (k^3 - k) + 3k^2 + 3k \\ &= 3a + 3(k^2 + k) \quad \text{(ved ind.hyp.)} \\ &= 3(a + k^2 + k)\end{aligned}$$

- Da må $(k + 1)^3 - (k + 1)$ være delelig på 3 og påstanden holder.

Oppgave 7.14

Bevis ved induksjon:

(a) $\sum_{i=1}^n (4i - 1) = n(2n + 1).$

(b) $\sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1.$

Løsning

- (a) Induksjonsstart ($n=1$): $\sum_{i=1}^1 (4i - 1) = 4 - 1 = 3 = (2 + 1)$. OK!
Induksjonsskritt ($n+1$): $\sum_{i=1}^{n+1} (4i - 1) = n(2n + 1) + 4(n + 1) - 1 = 2n^2 + n + 4n + 3 = (n + 1)(2(n + 1) + 1)$ OK!
- (b) Induksjonsstart ($n=1$): $\sum_{i=1}^1 2^{i-1} = 2^{1-1} = 1 = 2^0 = 1 - 1 = 2^0 - 1$ OK!
Induksjonsskritt ($n+1$):
 $\sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} = (2^n - 1) + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$. OK!

Oppgave 7.15

La $t(n)$ være definert ved $t(1) = 2$ og $t(n) = t(n-1) + 3n - 1$ ($n > 1$).
Bevis ved induksjon at $t(n) = \frac{n(3n+1)}{2}$.

Løsning

Induksjonsstart ($n = 1$): $t(1) = 2$ pr. definisjon. Vi ser også at

$$\frac{1(3+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ OK!}$$

Induksjonsskritt ($n+1$):

$$t(n+1) = t(n) + 3(n+1) - 1 = \frac{n(3n+1)}{2} + 3(n+1) - 1 =$$

$$\frac{n(3n+1) + 6(n+1) - 2}{2} = \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2} \text{ OK!}$$

Oppgave 7.16

La $t(n)$ være definert ved $t(1) = 1$ og $t(n) = t(n - 1) + n \cdot n!$ ($n > 1$).
Bevis ved induksjon at $t(n) = (n + 1)! - 1$.

Løsning

Induksjonsstart ($n = 1$): $t(1) = 1$ pr. definisjon. Vi ser også at

$$(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{OK!}$$

Induksjonsskritt ($n+1$):

$$t(n + 1) = t(n) + (n + 1) \cdot (n + 1)! = (n + 1)! - 1 + (n + 1) \cdot (n + 1)! =$$

$$(n + 2)(n + 1)! - 1 = (n + 2)! - 1 \quad \text{OK!}$$

Oppgave 7.17

Betrakt følgende induktivt definerte følge (omformulert til $n + 1$):

$$t(1) = 2 \text{ og } t(n + 1) = t(n) + 2n + 1 .$$

Beregn noen følgeledd, finn et lukket uttrykk for $t(n)$, og bevis det ved induksjon.

Løsning

Vi beregner noen ledd: Tenke, tenke, tenke, tenke... AHA!

1	2	3	4	5	6	...
<hr/>						
2	7	14	23	34	47	...
$4 - 2$	$9 - 2$	$16 - 2$	$25 - 2$	$36 - 2$	$49 - 2$...
$2^2 - 2$	$3^2 - 2$	$4^2 - 2$	$5^2 - 2$	$6^2 - 2$	$7^2 - 2$...
<hr/>						

Vi gjetter $t(n) = (n + 1)^2 - 2 - t(1) = (1 + 1)^2 - 2 = 2$. Vi ser og at $t(n + 1) = (n + 1)^2 - 2 + 2(n + 1) + 1 = (n + 2)^2 - 2$, som var det vi skulle vise.

Oppgave 7.18

Anta at vi kan bevise (i) $A(5)$ og (ii) $\forall x \in \mathbb{N}(A(x) \rightarrow A(x + 1))$, der $A(x)$ er et eller annet utsagn om naturlige tall.

For hvilke tall n kan vi vite at $A(n)$ er sann?

Løsning

Svaret er $\{5, 6, 7, 8, \dots\}$.

For et mer generelt eksempel, la p være et primtall, og la $A_p(x) = p|x|!$, dvs. 'p deler x faktoret. Vi kan enkelt vise at $p|p|!$, dvs. $A_p(p)$, og hvis $p|n!$ – dvs. $A_p(n)$ – så vil $(n + 1)! = (n + 1)n! = (n + 1) \cdot p \cdot k$ for en passende k . Altså $A_p(n + 1)$: vi har nå vist at $A_p(n) \rightarrow A_p(n + 1)$... Men p deler *ikke* $n!$ når $n < p$, siden $n = k \cdot p$ for $k \in \mathbb{N}$ tilsier at $n \geq \frac{n}{k} = p > n$: dvs. $n > n$, en selvmotsigelse!!

Oppgave 7.20

(Om å gjøre induksjonsbevis ved å starte med $n = 0$.)

- (a) Bevis at $(6^n - 1)/5$ er et heltall for $n \geq 0$, ved å bruke $n = 0$ som induksjonsstart.
- (b) Forklar problemet ved å vise at $2^n > n$ for $n \geq 0$ ved induksjon hvor $n = 0$ er induksjonsstarten.
- (c) Bruk induksjon på en annen måte for å vise at $2^n > n$ for $n \geq 0$.

Løsning (a)

Induksjonsstarten er å vise at $\frac{6^n-1}{5}$ er et heltall for $n = 0$:

$$\frac{6^n - 1}{5} = \frac{6^0 - 1}{5} = \frac{1 - 1}{5} = 0 \text{ er et heltall}$$

Løsning (a)

Induksjonsskrittet er å vise at hvis $\frac{6^k-1}{5}$ er et heltall, så er $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ et heltall.

- Vi antar at $\frac{6^k-1}{5}$ er et heltall.
- Vi skal komme frem til at $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ er et heltall.
- La oss gange hele uttrykket med 6.
- Da får vi også et heltall, $\frac{6(6^k-1)}{5}$.
- Da må $\frac{6^{k+1}-6}{5}$ være et heltall.
- Men, $\frac{6^{k+1}-6}{5} = \frac{6^{k+1}-1}{5} - \frac{5}{5}$.
- Da må også $\frac{6^{k+1}-1}{5}$ være et heltall

Løsning (b)

“Forklar problemet ved å vise at $2^n > n$ for $n \geq 0$ ved induksjon hvor $n = 0$ er induksjonsstarten.”

- La oss forsøke!
- Induksjonsstarten er å vise at $2^n > n$ holder for $n = 0$.
- Det er greit, for vi har $2^0 = 1 > 0$
- Induksjonsskrittet begynner med å anta at $2^n > n$ holder for $n = k$.
- Induksjonshypotesen er derfor at $2^k > k$.
- Vi må vise at $2^n > n$ holder for $n = k + 1$, det vil si at $2^{k+1} > k + 1$.
- Ved å multiplisere med 2 på begge sider, får vi $2^{k+1} > 2k$.
- Hvis $2k \geq k + 1$ holder, så er vi i mål, siden $2^{k+1} > 2k \geq k + 1$.
- Men, $2k \geq k + 1$ holder kun hvis $k > 0$!
- (For hvis $k = 0$, så vil $2k = 0$ og $k + 1 = 1$.)

Løsning (c)

‘Bruk induksjon på en annen måte for å vise at $2^n > n$ for $n \geq 0$.’

- Induksjonsstarten er den samme: $2^0 = 1 > 0$
- Vi viser induksjonsskrittet på en annen måte.
- Vi antar på samme måte at $2^n > n$ holder for $n = k$.
- Vi må vise at $2^n > n$ holder for $n = k + 1$, det vil si at $2^{k+1} > k + 1$.
- Induksjonshypotesen gir at $2^k > k$.
- I stedet for å gange med 2 på begge sider, kan vi *summere* med 2^k på begge sider.
- Vi får da $2^k + 2^k > k + 2^k$.
- Vi har at $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, så $2^{k+1} > k + 2^k$.
- Vi har at $2^k \geq 1$, så $k + 2^k \geq k + 1$.
- Vi får dermed at $2^{k+1} > k + 1$.

Oppgave 7.23

Løs følgende rekurrenslikninger

(a) $t(n) - 5t(n-1) + 4t(n-2) = 0$, $t(1) = 2$, $t(2) = -1$

Løsning

- Den karakteristiske likningen til likningen er $x^2 - 5x + 4 = 0$.
- Vi faktoriserer til $(x-1)(x-4) = 0$.
- $x = 1$ og $x = 4$ er løsninger av denne likningen.
- Den generelle løsningen til rekurrenslikningen er $t(n) = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n = A + B \cdot 4^n$
- $t(1) = 2$ gir $A + 4^1 B = 2$
- $t(2) = -1$ gir $A + 4^2 B = A + 16B = -1$
- Vi får $2 - 4B = -1 - 16B$ og $3 = -12B$ og $B = -\frac{1}{4}$
- Ved å sette inn $B = -\frac{1}{4}$ i $A + 4B = 2$ får vi $A = 3$.
- Løsningen er derfor $t(n) = 3 + (-\frac{4^n}{4}) = 3 - 4^{n-1}$.