MAT1030 – Diskret Matematikk

Plenumsregning 4: Ukeoppgaver

Mathias Barra

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

6. februar 2009

(Sist oppdatert: 2009-02-10 11:20)

Plenumsregning 4

Oppgave 4.1

Uttrykk følgende utsagn i utsagnslogikk og identifiser hovedkonnektivene.

(a) Either Karen is studying computing and Minh is not studying mathematics, or Minh is studying mathematics.

(b) It is not the case that if it is sunny then I will carry an umbrella.

(c) The program will terminate if and only if the input is not numeric or the escape key is pressed.

(d) If $x = 7$ and $y \neq 4$ and $z = 2$, then if it is not true that either $y = 4$ or $z \neq 2$ then $x = 7$ or $z = 2$.

Løsning 4.1 (a)

Either Karen is studying computing and Minh is not studying mathematics, or Minh is studying mathematics.

p: "Karen is studying computing"

q: "Minh is studying mathematics"

Svar: $(p \wedge \neg q) \vee q$

Hovedkonnektivet er $\vee$ (eller)

Siden $(a \wedge b) \vee c \not\equiv a \wedge (b \vee c)$ må vi skjønne hva som menes. Kommaet foran 'or' viser at muntlig gjøres det en liten pause foran dette eller'et. Dette identifiserer $\vee$ som hovedkonnektiv i denne oppgaven.

Løsning 4.1 (b–d)

(b) It is not the case that if it is sunny then I will carry an umbrella.

p: "it is sunny" q: "I will carry an umbrella"

Svar: $\neg(p \to q)$

Hovedkonnektivet er $\neg$ (ikke).

(c) The program will terminate if and only if the input is not numeric or the escape key is pressed.

p: "the program will terminate" q: "the input is numeric"

r: "the escape key is pressed"

Svar: $p \leftrightarrow (\neg q \lor r)$

Hovedkonnektivet er $\leftrightarrow$ (hvis-og-bare-hvis)

(d) If $x = 7$ and $y \neq 4$ and $z = 2$, then if it is not true that either $y = 4$ or $z \neq 2$ then $x = 7$ or $z = 2$.

p: "$x = 7$" q: "$y = 4$" r: "$z = 2$"

Svar: $(p \land \neg q \land r) \to (\neg(q \lor \neg r) \to (p \lor r))$

Hovedkonnektivet er første forekomst av $\to$ (hvis-så)

Oppgave 4.2

p: det snør
q: jeg skal gå på ski

Løsning

(a) $\neg p \wedge q$:
Det snør ikke og jeg skal gå på ski.

(b) $p \rightarrow q$:
Hvis det snør, så skal jeg gå på ski.

(c) $\neg q \rightarrow p$:
Hvis jeg ikke skal gå på ski, så snør det.

(d) $(p \vee \neg q) \wedge p$:
Det snør eller jeg skal ikke gå på ski, og det snør.

Oppgave 4.4

Skriv ned setninger som svarer til den konverse og den kontrapositive av følgende utsagn.

Husk at hvis $p \to q$ er påstanden, så har vi at

- $q \to p$ er den konverse, og at
- $\neg q \to \neg p$ er den kontrapositive.

Den konverse betyr noe annet enn den opprinnelige påstanden, mens den kontrapositive er logisk ekvivalent med den opprinnelige påstanden.

Løsning

(a) Hvis inputfilen eksisterer, så genereres ikke en feilmelding.

- Konvers:
  Hvis det ikke genereres en feilmelding, så eksisterer inputfilen.
- Kontrapositiv:
  Hvis det genereres en feilmelding, så eksisterer ikke inputfilen.

Løsning

(b) Hvis databasen ikke er tilgjengelig, så kan ikke programmet mitt kjøre.

- Konvers:
  Hvis ikke programmet mitt kan kjøre, så er ikke databasen tilgjengelig.
- Kontrapositiv:
  Hvis programmet mitt kan kjøre, så er databasen tilgjengelig.

Løsning

(c) Hvis programmet ikke inneholder noen feil, så gir det korrekt output.

- Konvers:
  Hvis programmet gir korrekt output, så inneholder det ikke noen feil.
- Kontrapositiv:
  Hvis programmet ikke gir korrekt output, så inneholder det noen feil.

Oppgave 4.7

La P og Q stå for logiske uttrykk.
Hvis P er usann for en gitt tilordning av sannhetsverdier til variablene i P og Q, så må $P \wedge Q$ være usann for den tilordningen, så det er ikke nødvendig å finne verdien til Q.

(a) Gi en tilsvarende regel for $P \vee Q$.

(b) Konstruer, ved å bruke disse reglene som snarveier, sannhetsverditabellene for følgende uttrykk.

(i) $[\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee \neg r)] \wedge [(p \wedge r) \vee \neg q]$

(ii) $\neg[\neg p \wedge (q \vee r)] \vee (\neg p \wedge \neg r)$

Løsning (a)

Hvis P er sann for en gitt tilordning av sannhetsverdier til variablene, så må $P \vee Q$ være sann for den tilordningen,så det er ikke nødvendig å finne verdien til Q.

Løsning (b(i))

p	q	r	$[\neg$	$(p \wedge q)$	$\wedge$	$(p \vee \neg r)]$	$\bigwedge$	$[(p \wedge r)$	$\vee$	$\neg q]$
T	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	–	**F**	–	–	–
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	–	**F**	–	–	–
T	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	–	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	–	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**	–	–	–
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**	–	–	–
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	–	**T**	**T**

Løsning (b(ii))

p	q	r	$\neg$	$[\neg p$	$\wedge$	$(q \vee r)]$	$\vee$	$(\neg p \wedge \neg r)$
T	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**	—	**T**	—
T	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	—	**T**	—
T	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	—	**T**	—
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	—	**T**	—
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	—	—	—	—	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	—	—	—	—	**T**	**T**

Oppgave 4.8

Bruk sannhetsverditabeller for å vise at $\neg(p \vee \neg q)$ og $\neg p \wedge q$ er logisk ekvivalente.

Løsning

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$\neg q)$	$\neg p$	$\wedge$	q
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**

Oppgave 4.9

Bruk sannhetsverditabeller for å vise følgende logiske lover.

(a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Løsning (a)

p	q	r	p	$\wedge$	$(q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$\vee$	$(p \wedge r)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	–
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	–
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	–	**T**	**T**
T	**F**	**F**	–	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**	–	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**F**	–	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**	–	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	–	**F**	**F**	**F**

Oppgave 4.10

Bruk de logiske lovene til å forenkle følgende uttrykk. (Dette er analogt til å forenkle algebraiske uttrykk.)

(a) $(p \lor \neg q) \land (p \lor q)$

(b) $\neg[p \rightarrow \neg(p \land q)]$

(c) $\neg[p \lor (q \land \neg p)]$

(d) $[(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \rightarrow p)] \lor (r \rightarrow \neg q)$

Løsning 4.10 (a–c)

(a) $(p \lor \neg q) \land (p \lor q) \overset{\text{Dist.}}{\equiv} p \lor (\neg q \land q) \overset{\text{Com.}}{\equiv} p \lor (q \land \neg q) \overset{\text{Inv.}}{\equiv} p \lor \mathbf{F} \overset{\text{Id.}}{\equiv} p$

(b) $\neg[p \to \neg(p \land q)] \overset{\text{Imp.}}{\equiv} \neg[\neg p \lor \neg(p \land q)] \overset{\text{deM.}}{\equiv} \neg[p \lor (\neg p \lor \neg q)] \overset{\text{Ass.}}{\equiv}$
$\neg[(\neg p \lor \neg p) \lor \neg q] \overset{\text{Idm.}}{\equiv} \neg(\neg p \lor \neg q) \overset{\text{deM.}}{\equiv} \neg\neg p \land \neg\neg q \overset{\text{DoN.}}{\equiv} p \land q$

(c) $\neg[p \lor (q \land \neg p)] \overset{\text{deM.}}{\equiv} \neg p \land \neg(q \land \neg p) \overset{\text{deM.}}{\equiv} \neg p \land (\neg q \lor p) \overset{\text{Dist.}}{\equiv}$
$(\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land p) \equiv \neg p \land \neg q \equiv \neg(p \lor q)$

Løsning 4.10 (d)

$$[(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \rightarrow p)] \vee (r \rightarrow \neg q) \equiv$$

$$[\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)] \vee \neg(\neg r \vee p)] \vee (\neg r \vee \neg q) \equiv$$

$$[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)] \vee (r \wedge \neg p) \vee (\neg r \vee \neg q) \equiv$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg p) \vee \neg r \vee \neg q \equiv$$

$$[(\neg r \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p)] \vee [(\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee (p \wedge \neg p) \equiv$$

$$(\neg r \vee \neg p) \vee (\neg q \vee \neg p) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$$

Oppgave 4.13

Bruk de logiske lovene til å klassifisere følgende uttrykk some tautologier eller kontradiksjoner.

(a) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)$

(b) $[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$

(c) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ Modus Ponens

En tautologi er sann for enhver tilordning av sannhetsverdier, en kontradiksjon er usann.

Løsning

(a) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \equiv [(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee q \equiv$ Tautologi

(b) $[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \wedge \neg p) \equiv [\neg p \vee (\neg q \vee p) \leftrightarrow F] \equiv T \leftrightarrow F \equiv$ FKontradiksjon

(c) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q \equiv \neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \vee q \equiv [\neg p \vee (p \wedge \neg q)] \vee q \equiv [(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)] \vee q \equiv \neg p \vee q \vee q \equiv$ Tautologi

Oppgave 4.16

Finn et uttrykk som er logisk ekvivalent med $p \vee q$, men som kun bruker konnektivene $\wedge$ og $\neg$.

Løsning

- Vi vet at $p \vee q$ er logisk ekvivalent med $\neg\neg(p \vee q)$.
- Vi vet også at $\neg(p \vee q)$ er logisk ekvivalent med $\neg p \wedge \neg q$.
- Da må $p \vee q \equiv \neg\neg(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

p	q	$p \vee q$	$\neg$	$(\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
T	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**

Oppgave 4.17

Vi skal definere et konnektiv $|$, der $P|Q$ intuitivt skal bety *ikke både* P *og* Q *samtidig*. Dette konnektivet kalles ofte '**nand**', og vi velger følgende sannhetsverditabell for **nand**:

p	q	$p \mid q$
T	**T**	**F**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

(a) Finn et uttrykk som er logisk ekvivalent med $\neg p$ og som kun bruker $|$.

(b) Finn et uttrykk som er logisk ekvivalent med $p \wedge q$ og som kun bruker $|$.

(c) Finn et uttrykk som er logisk ekvivalent med $p \vee q$ og som kun bruker $|$.

Løsning

(a)

p	$p \mid p$
T	**F**
F	**T**

(b)

p	q	$p \land q$	$p \mid q$	$(p \mid q) \mid (p \mid q)$
T	**T**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**F**

(c)

p	q	$p \lor q$	$p \mid p$	$q \mid q$	$(p \mid p) \mid (q \mid q)$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**

Oppgave Fra Forelesning 27.01 s.17

Finn sannhetsverditabellen til

(a) $(p \to q) \to p$

(b) $(p \to q) \vee (q \to p)$

(c) Hva ser du i kolonnen lengst til høyre?

Løsning (a–c)

(a)

p	q	$(p \to q)$	$\to$	$p)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**

(b)

p	q	$(p \to q)$	$\vee$	$(q \to p)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

(c) Vi ser at (a) er ekvivalent med p, og at (b) er en tautologi.

Oppgave Fra Forelesning 28.01 s.20

Vis at for logiske uttrykk A, B og C gjelder

(a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ og $(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A)$

(b) Forklar hvorfor dette betyr at rekkefølge og parentesetting ikke betyr noe i uttrykk som kun benytter konnektivet $\leftrightarrow$.

(c) [Vanskelig] Hvordan kan vi lett avgjøre om et slikt uttrykk er en tautologi eller ikke?

Løsning (a–b)

(a) Tilfellet $(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A)$, følger av at $\leftrightarrow$ kan betraktes som em forkortelse av et $\wedge$-uttrykk, og vi vet at $\wedge$ er kommutativ. For assosiativiteten kan vi f.eks. sette opp en sannhetsverditabell.

(b) Vi trenger ikke bry oss om rekkefølge og parentessetting fordi det å forandre en av disse ikke endrer på sannhetsverditabellen. Alle varianter er logisk ekvivalente. Dette er samme fenomen som med $A \vee B \vee C$, eller $A \wedge B \wedge C$.

Løsning (c)

Anta først at det i et uttrykk A finnes et jevnt (partall) antall av alle de involverte utsagnsvariablene $p_1 \dots p_n$.Vi kan da (pga. svaret i (b)) omorganisere dem slik at uttrykket kommer på formen

$$A \equiv (p_1 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (p_n \leftrightarrow p_n)$$

Siden $p_i \leftrightarrow p_i \equiv \mathbf{T}$ ser vi at $A \equiv \mathbf{T} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$.
Hvis f.eks. $p_1, \dots p_K$ har et ujevnt antall kan vi redusere utrykket til

$$A \equiv (\mathbf{T} \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (\mathbf{T} \leftrightarrow p_k) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (p_n \leftrightarrow p_n) \equiv$$

$$p_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow p_k \leftrightarrow \mathbf{T}$$

som ikke er en tautologi.

Vi har altså vist at et slikt uttrykk er en tautologi hviss hver utsagnsvariabel forekommer et jevnt antall ganger.

Løsning (c) For de spesielt interesserte

Sagt på en annen måte: La A være et $\leftrightarrow$-uttrykk, og la $P(A)$ være påstanden 'A har et jevnt antall av alle de involverte utsagnsvariablene', og $Q(A)$ påstanden 'A er en tautologi'. Vi har da over argumentert for at (1) $P(A) \to Q(A)$ og at (2) $\neg P(A) \to \neg Q(A)$. Den andre implikasjonen er logisk ekvivalent med sin kontrapositive: $Q(A) \to P(A)$ (som også er konversen til den første implikasjonen.) Tilsammen har vi altså $(P(A) \to Q(A)) \land (Q(A) \to P(A))$, som er ekvivalent med $P(A) \leftrightarrow Q(A)$.