MAT1030 – Diskret Matematikk

Plenumsregning 5: Ukeoppgaver

Mathias Barra

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

13. februar 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-06 18:29)

Oppgave 4.18

Uttrykk følgende påstander i predikatlogikk, og finn deres sannhetsverdier.

(a) Det fins et reellt tall x slik at $x^2 - 3x + 2 = 0$.

(b) For ethvert reellt tall x, så fins det et reellt tall y slik at $x = y^2$.

Løsning

(a) $\exists x(x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 3x + 2 = 0)$ eller $\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0)$
Sant; hvis vi lar $x = 2$, så ser vi at påstanden holder.

(b) $\forall x(x \in \mathbb{R} \rightarrow \exists y(y \in \mathbb{R} \wedge x = y^2))$ eller $\forall x \exists y(x = y^2)$
Usant; vi får et moteksempel ved å la $x = -1$.

Oppgave 4.19

Skriv negasjonene til påstandene i oppgave 4.18, både symbolsk og på norsk.

Løsning

(a) $\neg\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0)$ eller $\forall x(x^2 - 3x + 2 \neq 0)$
For alle reelle tall x, så er det ikke slik at $x^2 - 3x + 2 = 0$.

(b) $\neg\forall x\exists y(x = y^2)$ eller $\exists x\forall y(x \neq y^2)$
Det fins et reellt tall x slik at for alle y, så er det ikke slik at $x = y^2$.

Oppgave 4.20

I spesifikasjonen til et biblioteksystem har vi følgende predikatsymboler:

- $B(p, b)$, som står for predikatet "person p har lånt bok b", og
- $O(b)$, som står for predikatet "bok b har forfalt".

Utrykk følgende setninger i predikatlogikk.

Løsning

(a) Person p har lånt en bok. (Anta at *en* betyr *minst en*.)

- Det fins en bok x slik at p har lånt x.
- $\exists x(\text{person } p \text{ har lånt bok } x)$
- $\exists x B(p, x)$

(b) Bok b er utlånt.

- Det fins en person x slik at x har lånt bok b.
- $\exists x(\text{person } x \text{ har lånt bok } b)$
- $\exists x B(x, b)$

(c) Bok b står på hylla.

- Det fins ingen som har lånt bok b.
- $\neg\exists x B(x, b)$ eller $\forall x \neg B(x, b)$

(d) Person p har lånt minst to bøker.

- Det fins en bok x og en bok y slik at person p har lånt x og y.
- Vi må også si at x og y ikke kan være samme bok.
- $\exists x \exists y(B(p, x) \wedge B(p, y) \wedge x \neq y)$

Løsning

(e) Ingen bok har blitt lånt av mer enn en person.

- Det fins ikke en bok b som er lånt av to (forskjellige) personer.
- $\neg\exists b(\text{to forskjellige personer har lånt } b)$
- $\neg\exists b\exists x\exists y(B(x,b) \land B(y,b) \land x \neq y)$
- alternativt: $\forall b\neg\exists x\exists y(B(x,b) \land B(y,b) \land x \neq y)$
- alternativt: $\forall b\forall x\forall y\neg(B(x,b) \land B(y,b) \land x \neq y)$
- alternativt: $\forall b\forall x\forall y(B(x,b) \land B(y,b) \to x = y)$

(f) Det fins ingen forfalte bøker.

- Det fins ikke en bok x slik at x har forfalt.
- $\neg\exists x O(x)$ eller $\forall x\neg O(x)$

(g) Hvis en bok har forfalt, så må den være utlånt.

- For alle bøker x, hvis x har forfalt, så fins en person y som har lånt x.
- $\forall x(O(x) \to \exists y B(y,x))$

(h) Person p har en forfalt bok.

- Det fins en forfalt bok x slik at person p har lånt x.
- $\exists x(O(x) \land B(p,x))$

Oppgave 4.21 (a) Bevis følgende påstand

Summen av et partall og et oddetall er et oddetall.

Bevis

- Anta at x er et partall og at y er et oddetall.
- Siden x er et partall, så fins det et heltall m slik at $x = 2m$.
- Siden y er et oddetall, så fins det et heltall n slik at $y = 2n + 1$.
- Summen $x + y$ blir da $2m + 2n + 1$.
- Ved å faktorisere får vi at $x + y$ er $2(m + n) + 1$.
- Siden $x + y$ er på formen $2s + 1$, så må det være et oddetall.
- Siden x og y var *vilkårlig* valgt, vil påstanden gjelde for *alle* slike tall.

Oppgave 4.21 (b) Bevis følgende påstand

Produktet av to oddetall er et oddetall.

Bevis

- Anta at x er et oddetall og at y er et oddetall.
- Siden x er et oddetall, så fins det et heltall m slik at $x = 2m + 1$.
- Siden y er et oddetall, så fins det et heltall n slik at $y = 2n + 1$.
- Produktet xy blir da $(2m + 1)(2n + 1)$.
- Ved å gange ut får vi at xy er $4mn + 2m + 2n + 1$.
- Ved å faktorisere får vi at xy er $2(2mn + m + n) + 1$.
- Siden xy er på formen $2s + 1$, så må det være et oddetall.
- Siden x og y var *vilkårlig* valgt, vil påstanden gjelde for *alle* slike tall.

Oppgave 4.21 (c) Bevis følgende påstand

La $x, y \in \mathbb{R}$ (Altså: x og y er reelle tall). Hvis $x + y < 2$, så $x < 1$ eller $y < 1$.

Bevis

- Et indirekte bevis får vi ved å anta det motsatte av påstanden og komme frem til en selvmotsigelse.
- Anta for motsigelse at det fins reelle tall x og y slik at $x + y < 2$ men hverken $x < 1$ eller $y < 1$.
- Siden $x \not< 1$, har vi $x \geqslant 1$.
- Siden $y \not< 1$, har vi $y \geqslant 1$.
- Da må $x + y \geqslant 2$.
- Det gir en motsigelse, siden vi har antatt $x + y < 2$.
- Vi konkluderer med at påstanden holder.

Bevis (Alternativt bevis)

- La x og y være reelle tall slik at $x + y < 2$.
- Hvis $x < 1$, så er vi ferdige.
- Vi kan derfor anta at $x \geqslant 1$.
- Vi må så vise at $y < 1$.
- Siden $x + y < 2$, så må $y < 2 - x$.
- Siden $y < 2 - x$ og $x \geqslant 1$, så må $y < 1$, og vi er ferdige.

Bevis (Alternativt bevis II (i))

- Etter min oppfatning er det enkleste her å bruke det at den kontrapositive til en implikasjon er ekvivalent med implikasjonen. Vi ønsker å vise at

  $$(x + y < 2) \rightarrow [(x < 1) \vee (y < 1)]$$

  Den kontrapositive er

  $$\neg[(x < 1) \vee (y < 1)] \rightarrow \neg(x + y < 2) \equiv [(1 \leqslant x) \wedge (1 \leqslant y)] \rightarrow (2 \leqslant x + y)$$

- En annen ting det er viktig å være bevisst på, er at nå man skal bevise en implikasjon $P \rightarrow Q$, trenger vi kun å bry oss om hva som skjer hvis vi antar at P er sann. Hva som skjer når P er gal er uinterresant – dette fordi sannheten til en implikasjon kun avhenger av om det er mulig å gjøre Q usann samtidig som P er sann.

Bevis (Alternativt bevis II (ii))

- Vi undersøker hva som skjer hvis $(1 \leqslant x) \wedge (1 \leqslant y)$. Da må vi kunne skrive La $r_x = x - 1$. Vi ser at da er $x = 1 + r_x$ og siden $x \geqslant 1$, må også $x - 1 = r_x \geqslant 0$. Tilsvarende kan vi skrive $y = 1 + r_y$ der $r_y \geqslant 0$. Vi ser også at $r_x + r_y \geqslant 0$, siden summen av to ikke-negative tall nødvendigvis selv er ikke-negativ.
- Forrige punkt er altså sant hvis $(1 \leqslant x) \wedge (1 \leqslant y)$. Men da er også følgende sant:

$$x + y = (1 + r_x) + (1 + r_y) = 2 + (r_x + r_y) \geqslant 2$$

  som var nøyaktig det vi skulle forsikre oss om: Hver gang $(1 \leqslant x) \wedge (1 \leqslant y)$ er sant må $x + y \geqslant 2$ være sant. Det er det det betyr – hverken mer eller midre – at en implikasjon er sann.

Oppgave 4.21 (d) Bevis følgende påstand

Summen av fem etterfølgende heltall er delelig med 5.

Bevis

- La y være summen av fem etterfølgende heltall.
- Anta at $y = x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4)$.
- Vi må vise at y er delelig med 5.
- Vi får at $y = 5x + 1 + 2 + 3 + 4 = 5x + 10 = 5(x + 2)$.
- Vi konkluderer med at y er delelig med 5.

Oppgave 4.21 (e) Bevis følgende påstand

Hvis n er et heltall, så er $n^2 + n$ et partall.

Bevis

- n må enten være et partall eller et oddetall.
- Anta først at n er et partall. Da fins det en m slik at $n = 2m$.

$$
\begin{aligned}
n^2 + n &= (2m)^2 + (2m) \\
&= 4m^2 + 2m \\
&= 2(2m^2 + m)
\end{aligned}
$$

- Anta så at n er et oddetall. Da fins det en m slik at $n = 2m + 1$.

$$
\begin{aligned}
n^2 + n &= (2m+1)^2 + (2m+1) \\
&= (4m^2 + 4m + 1) + (2m + 1) \\
&= 4m^2 + 6m + 2 \\
&= 2(2m^2 + 3m + 1)
\end{aligned}
$$

- Siden $n^2 + n$ i begge tilfeller er lik $2x$, for et heltall x, så må $n^2 + n$ være et partall.

Oppgave 4.21 (f) Bevis følgende påstand

Hvis n er et oddetall, så er $n^2 - 1$ delelig med 4.

Bevis

- Siden n er et oddetall, fins en m slik at $n = 2m + 1$.

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2m+1)^2 - 1 \\ &= (4m^2 + 4m + 1) - 1 \\ &= 4m^2 + 4m \\ &= 4(m^2 + m) \end{aligned}$$

- Siden $n^2 - 1 = 4(m^2 + m)$, så må $n^2 - 1$ være delelig med 4.

Oppgave 4.22

Fyll inn detaljene i bevisskissen for at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Løsning

1. Anta at $m/n = \sqrt{2}$, hvor m og n er naturlige tall. Forklar hvorfor vi kan anta at m og n ikke begge er partall.
   - Vi kan alltid forkorte en brøk slik at teller og nevner ikke har noen felles faktorer. Hvis både m og n hadde vært partall, kunne vi ha delt teller og nevner med 2 og fått en enklere brøk. Derfor kan vi anta at m/n allerede er forkortet maksimalt.
2. Utled at $m^2 = 2n^2$, og forklar så hvorfor m må være et partall.
   - Siden $m/n = \sqrt{2}$, så får vi ved å ta kvadratet av hver side $(m/n)^2 = (\sqrt{2})^2$, det vil si $m^2/n^2 = 2$. Ved å gange med n^2 på begge sider, får vi $m^2 = 2n^2$.
   - Siden $m^2 = 2n^2$, så må m^2 være et partall. Vi må vise at m også er et partall. Hvis m hadde vært et oddetall, så måtte m^2 også ha vært et oddetall. (Sjekk selv.) Siden m^2 ikke er et oddetall, så kan ikke m være oddetall heller. Vi konkluderer med at m er et partall.

Løsning

3. La $m = 2k$ (hvor k er et naturlig tall), og utled at n er et partall.
   - Fra $m^2 = 2n^2$ får vi at $(2k)^2 = 4k^2 = 2n^2$, det vil si at $2k^2 = n^2$. Det betyr at n^2 er et partall. Da må n også være et partall (ved samme argument som over).
4. Forklar hvorfor dette viser at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.
   - Fordi vi har kommet frem til en motsigelse ved at både m og n er partall.
   - Vi begynte med å anta for motsigelse at $\sqrt{2}$ var rasjonalt, det vil si at $\sqrt{2} = m/n$, hvor m og n er naturlige tall. Vi antok at m/n var maksimalt forkortet og at m og n derfor ikke begge kunne være partall. Deretter utledet vi at både m og n måtte være partall allikevel og fikk en motsigelse.

Oppgave 4.23

Finn et moteksempel til følgende påstander.

Løsning

(a) Ethvert naturlig tall delelig med både 4 og 6 må også være delelig med 24.

- Et moteksempel er 12.

(b) Hvis n er et naturlig tall, så må $n^4 + 4$ være et multippel av 5.

- Et moteksempel er 5 eller 10.

(c) Ethvert naturlig tall kan uttrykkes på formen $x^2 + y^2 + z^2$, for ikke-negative heltall x, y og z.

- Et moteksempel er 7.

Oppgave 4.24

Betrakt følgende selv-refererende utsagn:

U: 'Dette utsagnet har fem ord.'

(a) Hva er sannhetsverdien til dette utsagnet?

(b) Skriv ned negasjonen til U. Hva er Sannhetsverdien til $\neg$U (ikke-U)?

Løsning 4.24???

(a) Helt naivt kan vi si at det er sant. Det betyr at vi tolker ordet dette i U til å peke på U selv, og hvis vi teller ordene i U kommer vi til fem, akkurat slik U påstår under denne tolkningen av ordet dette.

(b) Negasjonen til U er

$$\neg \mathrm{U}: \text{‘Dette utsagnet har ikke fem ord.’}$$

Dette virker umiddelbart som nok et sant utsagn. Problemet nå er at vi tilsynelatende mener at *både* U *og* ¬U er sanne, noe vi gjenkjenner som en kontradiksjon. Vi kaller ofte en slikt fenomen et paradoks.

Legg merke til at ordet dette ikke peker på samme objekt i de to utsagnene. Litt lignende er det at ’Jeg heter Mathias Barra.‘ er sant hvis jeg sier det, mens negasjonen ’Jeg heter ikke Mathias Barra.‘ er sann hvis en av dere sier det. I oppgaven er det på en måte U og ¬U som snakker om seg selv, og som setninger er de ikke identiske – dermed kan ulike ting være sant om dem.

Løsning 4.24 (Tillegg)

Hvis vi tenker litt lenger kan vi observere følgende: Anta at vi ønsker å gi paradokset vårt et mer formellt preg. Dette blir ganske komplisert! Vi må ha relasjoner/predikater som kan fange opp alle de tingene vi uttrykker gjennom U. For eksempel kan vi ha et predikat $A(x, y)$ som sier at utsagn x har y ord. Da blir utsagnet f.eks.:

$$U = A(U, 5) = A(A(U, 5), 5) = \cdots$$

Generelt vil de fleste selvmotsigelser forsvinne hvis man prøver å formalisere dem. Men, de forsvinner ikke helt hvis man tillater at man definerer et objekt med en konstruksjon der objektet selv er nevnt. En rekursiv funksjon/metode er et nesten-selvrefererende objekt, men her går det som regel bra, fordi 'noe' endrer seg ved hvert skritt.