MAT1030 – Plenumsregning 7

Ukeoppgaver

Mathias Barra - 27. februar 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-06 19:10)

Oppgave 5.1

Skriv følgende mengder på listeform.

(a) Mengden av alle vokaler

(b) $\{x \in \mathbb{N} : 10 \leqslant x \leqslant 20 \text{ og } x \text{ er delbar med } 3\}$

(c) Mengden av alle naturlige tall som gir en rest på 1 når de deles på 5.

Løsning

(a) $\{a, e, i, o, u, y, æ, ø, å\}$

(b) $\{12, 15, 18\}$

(c) $\{1, 6, 11, 16, \ldots\}$

Oppgave 5.2

Skriv ned følgende mengder på "predikatform".

(a) $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

(b) $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

(c) $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

Løsning

(a) $\{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 20 \text{ og } x \text{ er delbar med } 4\}$ eller $\{x : x = 4y \text{ for et naturlig tall } y \leqslant 5\}$

(b) $\{x : x \text{ er en streng med tre bit}\}$ eller $\{x : x \in \{0, 1\}^3\}$

(c) $\{x : \text{det fins et naturlig tall } y \text{ slik at } x = y^2\}$ eller $\{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$ eller $\{x \in \mathbb{N} : \exists y(x = y^2)\}$ eller $\{x : x \text{ er et kvadrattall}\}$

Oppgave 5.3

La $A = \{1, \{1\}, \{2\}, 3\}$. Avgjør hvilke av følgende påstander som er sanne og usanne.

Løsning

(a) $1 \in A$ Sann

(b) $1 \subseteq A$ Usann

(c) $\{1\} \in A$ Sann

(d) $\{1\} \subseteq A$ Sann

(e) $\{\{1\}\} \subseteq A$ Sann

(f) $2 \in A$ Usann

(g) $\{2\} \in A$ Sann

(h) $\{2\} \subseteq A$ Usann

(i) $\{3\} \in A$ Usann

(j) $\{3\} \subseteq A$ Sann

Oppgave 5.4

La

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 12\}, \\
A &= \{x : x \text{ er oddetall}\}, \\
B &= \{x : x > 7\}, \text{ og} \\
C &= \{x : x \text{ er delelig med } 3\}.
\end{aligned}$$

Lag Venn-diagrammer for mengdene. Skriv ned følgende mengder på listeform.

(a) $A \cap B$

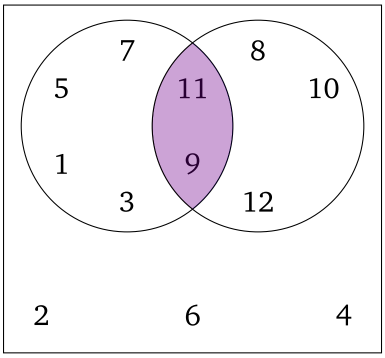
(b) $B \cup C$

(c) $\overline{A}$

(d) $(A \cup \overline{B}) \cap C$

(e) $\overline{(A \cup C)} \cup \overline{C}$

(a) $A \cap B$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 12\}$

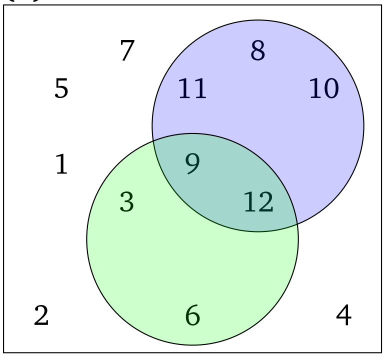
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (a): $\{9, 11\}$

(b) $B \cup C$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 12\}$

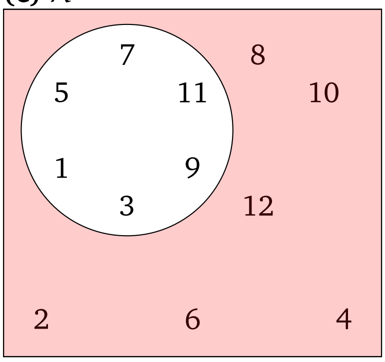
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (b): $\{3, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(c) $\overline{A}$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 12\}$

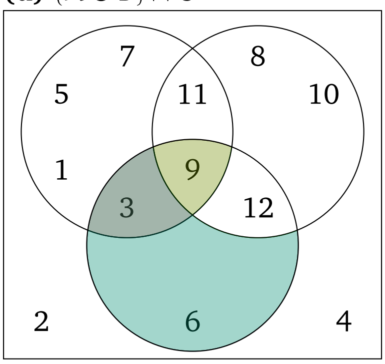
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (c): $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

(d) $(A \cup \overline{B}) \cap C$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 12\}$

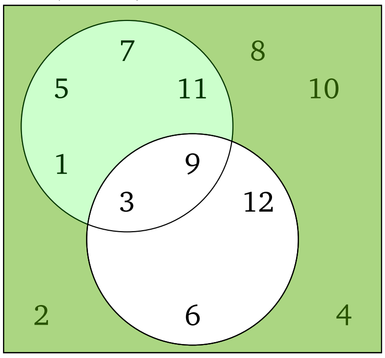
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (d): $\{3, 6, 9\}$

(e) $\overline{(A \cup C)} \cup \overline{C}$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 12\}$

$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

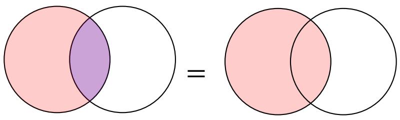
$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (e): $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

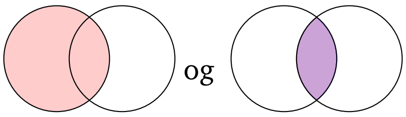
Oppgave 5.6

Illustrer den andre absorpsjonsloven, $A \cup (A \cap B) = A$, ved å bruke Venn-diagrammer.



$A \cup (A \cap B)$ $\quad = \quad$ A

Diagrammet for $A \cup (A \cap B)$ får vi ved å slå sammen følgende diagrammer:

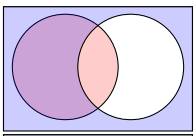


A og $A \cap B$

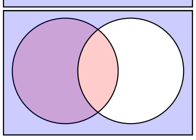
Oppgave 5.7 (med Venn-diagrammer)

Vis at $\overline{\overline{A} \cap B} = A \cup \overline{B}$ ved å bruke Venn-diagrammer.

Venn-diagrammet for $\overline{\overline{A} \cap B}$:



Venn-diagrammet for $A \cup \overline{B}$:



Siden Venn-diagrammene er like, må $\overline{\overline{A} \cap B} = A \cup \overline{B}$.

Løsning 5.7 (med mengdelovene)

$$\overline{\overline{A} \cap B} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{B} = A \cup \overline{B}$$

Oppgave 5.8

Er påstanden “enhver mengde med n elementer har 2^n delmengder” sann når $n = 0$?

Løsning

- Når $n = 0$ er mengden tom.
- Hvor mange delmengder har en tom mengde?
- Den har nøyaktig én delmengde, nemlig den tomme mengden.
- Siden $2^0 = 1$, blir svaret ja.

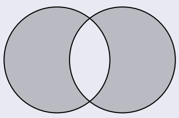
Oppgave fra side 41, fra forelesningen 17/2

Vi definerer ofte symmetrisk differens ved

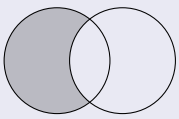
$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

a) Illustrer $A \triangle B$ ved et Venn-diagram.
b) Vis at $(A \triangle B) \triangle C$ kan illustreres ved Venn-diagrammet på neste side.
c) Drøft hvorfor dette viser at vi kunne skrevet $A \triangle B \triangle C$ uten bruk av parenteser.

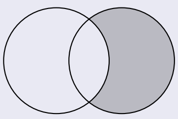
Løsning (a)


$A \triangle B$

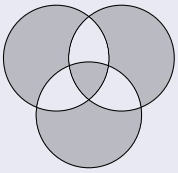
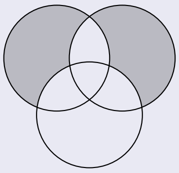
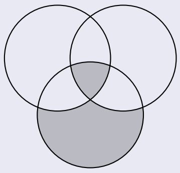
er unionen av


$A - B$

og


$B - A$

Løsning (b)

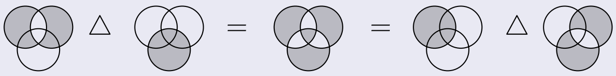
 er unionen av  og 

$(A \triangle B) \triangle C$ $\quad$ $(A \triangle B) - C$ $\quad$ $C - (A \triangle B)$

Symmetrisk differanse inverterer fargene.

Løsning (c)

- Vi har vist at $(A \triangle B) \triangle C$ kan tegnes med diagrammet .
- Det er lett å se at $A \triangle (B \triangle C)$ også har diagrammet .
- Vi kan illustrere det slik:



$(A \triangle B)$ $\quad$ C $\quad$ $A \triangle B \triangle C$ $\quad$ A $\quad$ $(B \triangle C)$

- Parentessettingen har ingenting å si for hvordan Venn-diagrammet ser ut.