

MAT1030 – Diskret Matematikk

Plenumsregning 7: Ukeoppgaver

Mathias Barra

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

27. februar 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-06 19:10)



Oppgave 5.1

Skriv følgende mengder på listeform.

- (a) Mengden av alle vokaler
- (b) $\{x \in \mathbb{N} : 10 \leq x \leq 20 \text{ og } x \text{ er delbar med } 3\}$
- (c) Mengden av alle naturlige tall som gir en rest på 1 når de deles på 5.

Løsning

- (a) $\{a, e, i, o, u, y, \text{æ}, \text{ø}, \text{å}\}$
- (b) $\{12, 15, 18\}$
- (c) $\{1, 6, 11, 16, \dots\}$

Oppgave 5.2

Skriv ned følgende mengder på “predikatform”.

- (a) $\{4, 8, 12, 16, 20\}$
- (b) $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- (c) $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

Løsning

- (a) $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 20 \text{ og } x \text{ er delbar med } 4\}$ eller $\{x : x = 4y \text{ for et naturlig tall } y \leq 5\}$
- (b) $\{x : x \text{ er en streng med tre bit}\}$ eller $\{x : x \in \{0, 1\}^3\}$
- (c) $\{x : \text{det fins et naturlig tall } y \text{ slik at } x = y^2\}$ eller $\{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$ eller $\{x \in \mathbb{N} : \exists y(x = y^2)\}$ eller $\{x : x \text{ er et kvadrattall}\}$

Oppgave 5.3

La $A = \{1, \{1\}, \{2\}, 3\}$. Avgjør hvilke av følgende påstander som er sanne og usanne.

Løsning

- (a) $1 \in A$ **Sann**
- (b) $1 \subseteq A$ **Usann**
- (c) $\{1\} \in A$ **Sann**
- (d) $\{1\} \subseteq A$ **Sann**
- (e) $\{\{1\}\} \subseteq A$ **Sann**
- (f) $2 \in A$ **Usann**
- (g) $\{2\} \in A$ **Sann**
- (h) $\{2\} \subseteq A$ **Usann**
- (i) $\{3\} \in A$ **Usann**
- (j) $\{3\} \subseteq A$ **Sann**

Oppgave 5.4

La

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\},$$

$$A = \{x : x \text{ er oddetall}\},$$

$$B = \{x : x > 7\}, \text{ og}$$

$$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}.$$

Lag Venn-diagrammer for mengdene. Skriv ned følgende mengder på listeform.

(a) $A \cap B$

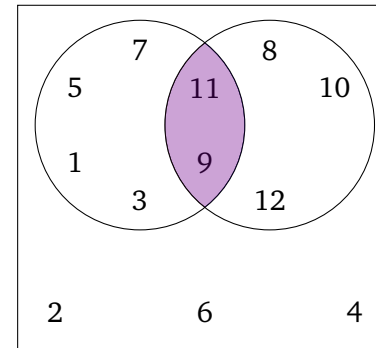
(b) $B \cup C$

(c) \bar{A}

(d) $(A \cup \bar{B}) \cap C$

(e) $\overline{(A \cup C)} \cup \bar{C}$

(a) $A \cap B$



$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$$

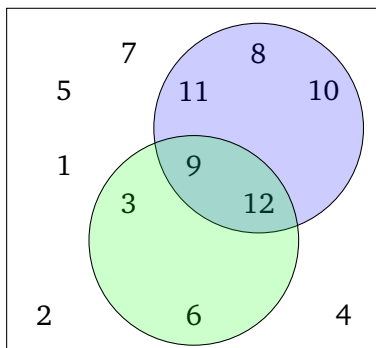
$$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$$

$$B = \{x : x > 7\}$$

$$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$$

Svar (a): $\{9, 11\}$

(b) $B \cup C$



$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$$

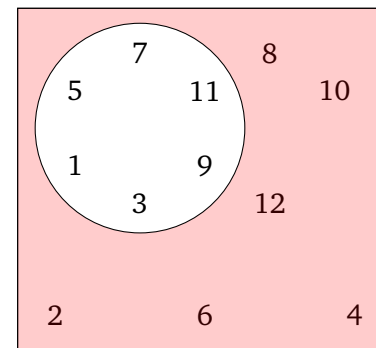
$$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$$

$$B = \{x : x > 7\}$$

$$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$$

Svar (b): $\{3, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(c) \bar{A}



$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$$

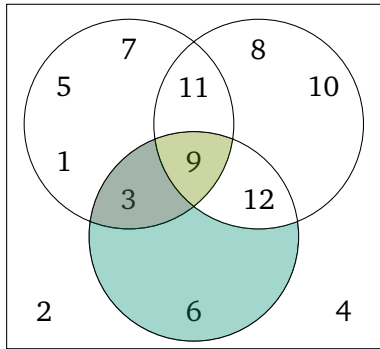
$$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$$

$$B = \{x : x > 7\}$$

$$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$$

Svar (c): $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

(d) $(A \cup \bar{B}) \cap C$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$

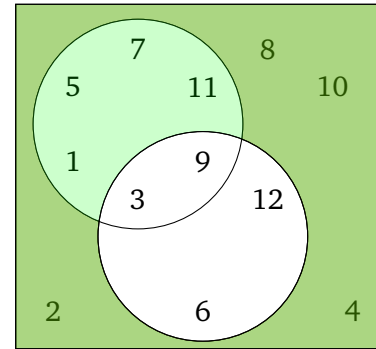
$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

Svar (d): $\{3, 6, 9\}$

(e) $\overline{(A \cup C)} \cup \bar{C}$



$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 12\}$

$A = \{x : x \text{ er oddetall}\}$

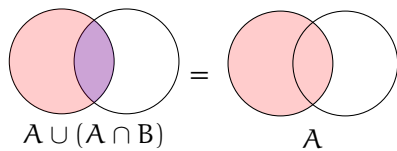
$B = \{x : x > 7\}$

$C = \{x : x \text{ er delelig med } 3\}$

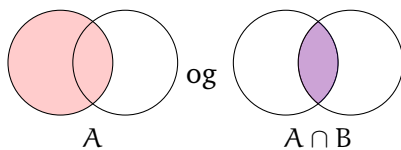
Svar (e): $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

Oppgave 5.6

Illustrer den andre absorpsjonsloven, $A \cup (A \cap B) = A$, ved å bruke Venn-diagrammer.



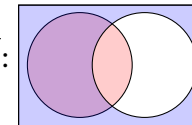
Diagrammet for $A \cup (A \cap B)$ får vi ved å slå sammen følgende diagrammer:



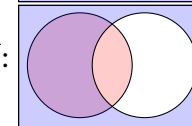
Oppgave 5.7 (med Venn-diagrammer)

Vis at $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup \bar{B}$ ved å bruke Venn-diagrammer.

Venn-diagrammet for $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$:



Venn-diagrammet for $A \cup \bar{B}$:



Siden Venn-diagrammene er like, må $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup \bar{B}$.

Løsning 5.7 (med mengdelovene)

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cup B$$

Oppgave 5.8

Er påstanden “enhver mengde med n elementer har 2^n delmengder” sann når $n = 0$?

Løsning

- Når $n = 0$ er mengden tom.
- Hvor mange delmengder har en tom mengde?
- Den har nøyaktig én delmengde, nemlig den tomme mengden.
- Siden $2^0 = 1$, blir svaret ja.

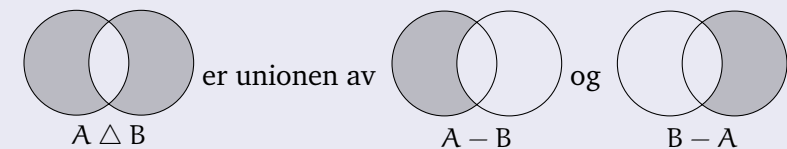
Oppgave fra side 41, fra forelesningen 17/2

Vi definerer ofte **symmetrisk differens** ved

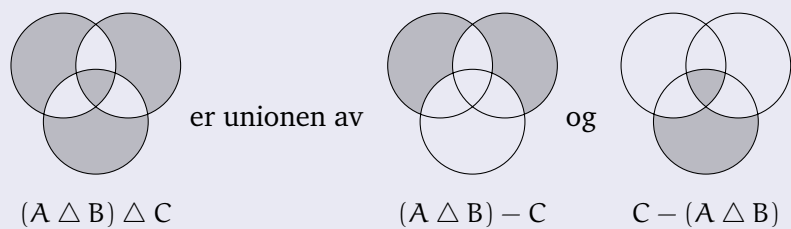
$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

- Illustrer $A \triangle B$ ved et Venn-diagram.
- Vis at $(A \triangle B) \triangle C$ kan illustreres ved Venn-diagrammet på neste side.
- Drøft hvorfor dette viser at vi kunne skrevet $A \triangle B \triangle C$ uten bruk av parenteser.

Løsning (a)



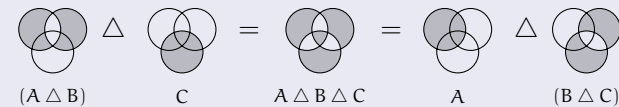
Løsning (b)



Symmetrisk differanse inverterer fargene.

Løsning (c)

- Vi har vist at $(A \Delta B) \Delta C$ kan tegnes med diagrammet
- Det er lett å se at $A \Delta (B \Delta C)$ også har diagrammet
- Vi kan illustrere det slik:



- Parentessettingen har ingenting å si for hvordan Venn-diagrammet ser ut.