MAT1030 – Diskret Matematikk

Plenumsregning 8: Ukeoppgaver

Mathias Barra

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

6. mars 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-06 19:11)

Oppgave 5.9

La $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{p, q\}$. Skriv ned følgende mengder på listeform.

(a) $A \times B$

(b) A^2

(c) B^3

Løsning

(a) $A \times B = \{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$

(b) $A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

(c) $B^3 = \{(p, p, p), (p, p, q), (p, q, p), (p, q, q),$
$(q, p, p), (q, p, q), (q, q, p), (q, q, q)\}$

Oppgave 5.10

Uttrykk hver av følgende mengder som et kartesisk produkt av mengder.

(a) Mulige måltider på en restaurant bestående av forrett, hovedrett og dessert.

(b) Mulige registreringsskilter med tre bokstaver etterfulgt av tre siffer.

(c) Mulige rekker av utfall med tre myntkast.

Løsning

(a) La F være mengden av forretter, H hovedretter og D desserter. Da får vi at Mulige treretters måltider $= F \times H \times D$.

(b) La $B = \{A, B, C, \ldots, Z\}$ og $T = \{0, 1, \ldots 9\}$. Mulige bilskilter er da $B \times B \times B \times T \times T \times T = B^3 \times T^3$

(c) La $A = \{M, K\}$. Mulige trekasts-rekker er da $A \times A \times A = A^3$

Oppgave 5.11

La $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, 16\}$.

(a) Finn bitstreng-representasjonen til $\{2, 4, 5, 7, 11, 14\}$.

(b) Skriv ned den (del-) mengden som er representert ved 1010 0110 1110 1001.

(c) Hvis A og B er representert ved henholdsvis 0011 0100 0110 1101 og 1010 1001 0001 0111, finn bitstreng-representasjonene til (i) $A \cup B$, (ii) $A \cap B$, (iii) $\overline{A}$ og (iv) $\overline{B}$.

Løsning (a)

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\} = \{2,4,5,7,11,14\}$$

$$0,2,0,4,5,0,7,0,0,0,11,0,0,14,0,0$$

$$0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,1\ ,0,0,1\ ,0$$

$0101\,1010\,0010\,0100\}$ representerer $\{2,4,5,7,11,14\}$

Løsning (b)

$1010\,0110\,1110\,1001$ representerer

$$\{1,\ ,3,\ ,\ ,6,7,\ ,9,10,11,\ ,13,\ ,\ ,16\} = \{1,3,6,7,9,10,11,13,16\}$$

$A = 0011\,0100\,0110\,1101$, $B = 1010\,1001\,0001\,0111$.

Løsning (c)

(i)	$A =$	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
	$B =$	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
	$A \cup B =$	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
(ii)	$A =$	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
	$B =$	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
	$A \cap B =$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
(iii)	$A =$	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
	$\overline{A} =$	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0

Oppgave 5.13

Se på følgende algoritme.

1. Input en bitstreng b
2. $n \leftarrow$ det usignerte bitet som har b som sin binære representasjon
3. $\mathrm{teller} \leftarrow 0$
4. **While** $n > 0$ **do**
   - 4.1. $n \leftarrow n \wedge (n-1)$ [$\wedge$ betyr her 'bitvis og', her anvendt på den binære representasjonen av n og $n-1$]
   - 4.2. $\mathrm{teller} \leftarrow \mathrm{teller} + 1$ [skrivefeil i boka: det står $-$ i stedet for $+$]
5. Output teller

Vis at returverdien er antall enere i b.

Eksempel

Anta at input er 100101.

teller	binær representasjon av n og $n-1$
0	1001001 1001000
1	1001000 1000111
2	1000000 0111111
3	0000000

Eksempel

Anta at input er 111101.

teller	binær representasjon av n og $n-1$
0	1111001 1111000
1	1111000 1110111
2	1110000 1101111
3	1100000 1011111
4	1000000 0111111
5	0000000

Løsning

- Vi skal vise at returverdien er antall enere i inputverdien.
- Det er tilstrekkelig å vise at hvert steg i **While**-løkken reduserer antall enere med nøyaktig én.
- Vi må vise at bitvis $\wedge$ av representasjonene til n og $n-1$ reduserer antall enere med nøyaktig én.
- La $b_1 \dots b_k$ være representasjonen til n.
- Vi kan anta at $n > 0$. Da må minst et bit være en ener.
- La b_m være eneren som forekommer lengst til høyre, for $1 \leqslant m \leqslant k$.
- Vi har følgende situasjon, hvor vi ser at bitvis $\wedge$ fjerner nøyaktig én ener. (Eventuelt flere detaljer i plenum.)

$$\begin{array}{c} b_1 b_2 \dots b_{m-1} 100 \dots 00 \\ b_1 b_2 \dots b_{m-1} 011 \dots 11 \\ \hline b_1 b_2 \dots b_{m-1} 000 \dots 00 \end{array}$$

Oppgave 5.14

Se på følgende sekvens av steg i pseudokode, hvor x og y er bitstrenger av lik lengde.

1. $x \leftarrow x \oplus y$ [$\oplus$ står for ‘bitvis eksklusiv eller’]
2. $y \leftarrow x \oplus y$
3. $x \leftarrow x \oplus y$

Vis at effekten av sekvensen av steg er å bytte verdiene til x og y.

Løsning

- La $x = x_1 \dots x_n$ og $y = y_1 \dots y_n$.
- La oss se på hva som skjer bitvis, for x_i og y_i, hvor $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Steg 1, $x \leftarrow x \oplus y$, setter x_i lik $x_i \oplus y_i$.
- Steg 2, $y \leftarrow x \oplus y$, setter y_i lik $(x_i \oplus y_i) \oplus y_i$.
- Steg 3, $x \leftarrow x \oplus y$, setter x_i lik $(x_i \oplus y_i) \oplus ((x_i \oplus y_i) \oplus y_i)$.
- Vi må vise at $(x_i \oplus y_i) \oplus y_i$ er lik den opprinnelige x_i.
- Vi må vise at $(x_i \oplus y_i) \oplus ((x_i \oplus y_i) \oplus y_i)$ er lik den opprinnelige y_i.

x_i	y_i	$(x_i \oplus y_i)$	$\oplus$	$((x_i \oplus y_i)$	$\oplus$	$y_i)$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

- Kolonnene 1 og 6 er like, og kolonnene 2 og 4 er like.

Løsning

- Vi kunne også ha løst oppgaven ved å vise at $(p \oplus q) \oplus q$ er logisk ekvivalent med p.

p	q	$(p \oplus q)$	$\oplus$	q
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

- Da må $(x_i \oplus y_i) \oplus y_i$ (den nye verdien til y_i) være lik x_i
- Da må $(x_i \oplus y_i) \oplus ((x_i \oplus y_i) \oplus y_i)$ (den nye verdien til x_i) være lik y_i.

Oppgave 5.15

La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og la R være relasjonen på A som er definert slik:

$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,5), (5,2), (5,5)\}$$

(a) Skriv ned relasjonen R på matriseform.

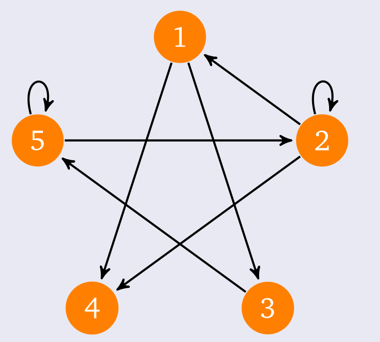
(b) Tegn den grafiske representasjonen av R.

$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,5), (5,2), (5,5)\}$$

Løsning

Vi gir relasjonen på matriseform og tegner den grafiske representasjonen.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathbf{F} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathrm{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathrm{T} \end{array}\right] \end{array}$$



Oppgave 5.16

La R være relasjonen på $\{a, b, c, d\}$ definert av følgende matrise.

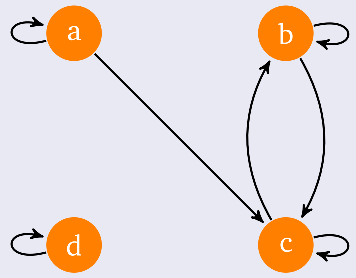
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \mathrm{T} & \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathrm{T} \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Tegn den grafiske representasjonen av R.

(b) Finn ut, og gi grunner for hvorvidt, R er refleksiv, symmetrisk eller transitiv.

Løsning

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \mathrm{T} & \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathrm{T} \end{bmatrix} \end{array}$$



- Er R refleksiv? Ja Hvorfor? Fordi alle på diagonalen er T. Og fordi alle nodene har en pil til seg selv.
- Er R symmetrisk? Nei Hvorfor ikke? Fordi matrisen ikke kan speiles om diagonalen. Vi har $(a, c) \in R$, men ikke $(c, a) \in R$.
- Er R transitiv? Nei Hvorfor ikke? Vi har $(a, c) \in R$ og $(c, b) \in R$, men ikke $(a, b) \in R$.

Oppgave 5.17

Er matriserepresentasjonen av en relasjon unik eller kan den samme relasjonen representeres av to forskjellige matriser?

Løsning

Representasjonen er ikke unik, siden den samme relasjonen kan representeres av to forskjellige matriser.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} b & a \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ a \end{array} & \begin{bmatrix} \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \end{array}$$

Begge matrisene representerer relasjonen $\{(a, b), (b, a), (b, b)\}$.