MAT1030 – Diskret Matematikk

Plenumsregning 9: Ukeoppgaver

Mathias Barra

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

13. mars 2009

(Sist oppdatert: 2009-03-17 09:35)

Oppgave 5.18

Avgjør om følgende relasjoner refleksive, irrefleksive, symmetriske, antisymmetriske eller transitive.

(a) "er søsken (bror eller søster) til", på mengden av alle mennesker

(b) "er sønnen til", på mengden av alle mennesker

(c) "er større enn", på mengden av reelle tall

(d) relasjonen R på reelle tall definert ved xRy hvis $x^2 = y^2$

(e) "har samme heltallsdel som", på mengden av reelle tall

(f) "er et multippel av", på mengden av positive heltall

Oppgave 5.19

Avgjør hvilke av relasjonene i Oppgave 5.18 som er ekvivalensrelasjoner (ekv.rel.). For de som er ekvivalensrelasjoner, beskriv ekvivalensklassene.

Husk at en ekv.rel. er reflksiv, symmetrisk og transitiv.

Oppgave 5.20

Avgjør hvilke av relasjonene i Oppgave 5.18 som er partielle ordninger (p.o.).

Husk at en p.o. er refleksiv, antisymmetriskog transitiv.

Løsning

(a) "er søsken (bror eller søster) til", på mengden av alle mennesker

- Refleksiv? Nei, det fins en som ikke er sin egen bror eller søster.
- Irrefleksiv? Ja, ingen er sin egen bror eller søster.
- Symmetrisk? Ja, hvis x er søsken til y, så er y søsken til x.
- Antisymmetrisk? Nei, vi ha at x er søsken til y og at y søsken til x, uten at $x = y$.
- Transitiv? Nei, hvis vi tillater halvsøsken, så kan a være søsken til b, og b søsken til c, uten at a er søsken til c. En annen grunn er at a kan være søsken til b og b søsken til a, men a kan er ikke søsken til a. (Takk til oppmerksomme studenter!)
- Ekvivalensrelasjon? Nei, den er ikke refleksiv
- Partiell ordning? Nei, den er hverken refleksiv, antisymmetrisk eller transitiv.

Løsning

(b) "er sønnen til", på mengden av alle mennesker

- Refleksiv? `Nei`, det fins en som ikke er sin egen sønn.
- Irrefleksiv? `Ja`, ingen er sin egen sønn.
- Symmetrisk? `Nei`, fordi "X er sønnen til Y" ikke medfører at "Y er sønnen til X".
- Antisymmetrisk? `Ja`, fordi "X er sønnen til Y" og "Y er sønnen til X" aldri er sanne samtidig.
- Transitiv? `Nei`, "X er sønnen til Y" og "Y er sønnen til Z" ikke medfører at "X er sønnen til Z".
- Ekvivalensrelasjon? `Nei`, den er hverken refleksiv, symmetrisk eller transitiv.
- Partiell ordning? `Nei`, den er hverken refleksiv eller transitiv.

Løsning

(c) "er større enn", på mengden av reelle tall

- Refleksiv? Nei, det finnes et reellt tall som ikke er større enn seg selv.
- Irrefleksiv? Ja, ingen reelle tall er større enn seg selv.
- Symmetrisk? Nei, f.eks. er 3 større enn 2, men 2 er ikke større enn 3.
- Antisymmetrisk? Ja, vi kan ikke ha at to tall er større enn hverandre.
- Transitiv? Ja, hvis x er større enn y og y er større enn z, så er x større enn z.
- Ekvivalensrelasjon? Nei, den er hverken refleksiv eller symmetrisk.
- Partiell ordning? Nei, den er ikke refleksiv.

Løsning

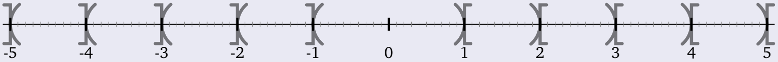
(d) relasjonen R på reelle tall definert ved xRy hvis $x^2 = y^2$

- Refleksiv? Ja, siden $x^2 = x^2$.
- Irrefleksiv? Nei, nei, f.eks. har vi at $1R1$.
- Symmetrisk? Ja, hvis $x^2 = y^2$ holder, så vil også $y^2 = x^2$ holde.
- Antisymmetrisk? Nei, vi har at $1R(-1)$ og $(-1)R1$, men $1 \neq -1$.
- Transitiv? Ja, hvis $x^2 = y^2$ og $y^2 = z^2$, så $x^2 = z^2$.
- Ekvivalensrelasjon? Ja
- Ekvivalensklasser: Alle mengder $\{x, -x\}$, hvor x er et positivt reellt tall, samt $\{0\}$.
- Partiell ordning? Nei, den er ikke antisymmetrisk.

Løsning

(e) "har samme heltallsdel som", på mengden av reelle tall

- Refleksiv? Ja, ethvert tall har samme heltallsdel som seg selv.
- Irrefleksiv? Nei, f.eks. har $3,14$ samme heltallsdel som seg selv.
- Symmetrisk? Ja, hvis x har samme heltallsdel som y, så må y ha samme heltallsdel som x.
- Antisymmetrisk? Nei, vi har at $1,28$ og $1,32$ har samme heltallsdel, men de er ikke like.
- Transitiv? Ja
- Ekvivalensrelasjon? Ja
- Ekvivalensklasser: For hvert heltall n har vi en ekvivalensklasse som består av de reelle tall med heltallsdel lik n:



  Ekvivalensklassene er følgende mengder, for $n \in \mathbb{N}$:
  $\{x : -n-1 < x \leqslant -n\}$ og $\{x : -1 < x < 1\}$ og $\{x : n \leqslant x < n+1\}$
  (Fasiten i boka sier $\{x : -n < x \leqslant -n+1\}$, men det blir feil for $n = 1$.)
- Partiell ordning? Nei, den er ikke antisymmetrisk.

Løsning

(f) "er et multippel av", på mengden av positive heltall

- Refleksiv? Ja, ethvert tall er et multippel av seg selv.
- Irrefleksiv? Nei, f.eks. er 2 et multippel av seg selv.
- Symmetrisk? Nei, 4 er et multippel av 2, og 2 er ikke et multippel av 4.
- Antisymmetrisk? Ja
  - Anta at $x = ay$ og at $y = bx$, for positive heltall x, y, a, b.
  - Da må $x = abx$.
  - Siden alle tallene er positive heltall, må $ab = 1$, og dermed må $a = 1$ og $b = 1$.
  - Siden $x = ay$, må $x = y$.
- Transitiv? Ja
  - Anta at $x = ay$ og at $y = bz$, for positive heltall x, y, z, a, b.
  - Da må $x = abz$, og x er et multippel av z.
- Ekvivalensrelasjon? Nei, den er ikke symmetrisk.
- Partiell ordning? Ja

Oppgave 5.21

Et dataprogram består av fem moduler: $M_1, M_2, \ldots, M_5$. En relasjon R på mengden av moduler er definert ved at $M_i R M_j$ hvis M_i er i kallsekvensen til M_j. Relasjonsmatrisen til R er denne:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \end{array}\right] \end{array}$$

(a) Bekreft at R er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

(b) Hvilken modul er hovedprogrammet?

Løsning

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \end{array}$$

- R er refleksiv: Alle verdier på diagonalen er **T**.
- R er antisymmetrisk: Fordi ingen **T** speiles om diagonalen.
- R er transitiv: Vi må sjekke alle muligheter i matrisen.
- Hvilken modul er hovedprogrammet? Oppgaven sa at $M_i R M_j$ holder hvis M_i er i kallsekvensen til M_j. M_3 skiller seg ut. Den kaller på alle moduler og blir kun kalt på av seg selv. Dette må være hovedprogrammet.

Oppgave Fra forelesning 03.03 s. 15

La A være en mengde med ekvivalensrelasjoner R og S. Definer $T = R \cap S$.

(a) Vis at aTb hvis og bare hvis $aRb \ \wedge \ aSb$.

(b) Vis at T er en ekvivalensrelasjon.

(c) Finn et eksempel hvor $R \cup S$ *ikke* er en ekv.rel.

Løsning (a)

aTb betyr at$\Leftrightarrow$
$(a, b) \in T$ betyr at$\Leftrightarrow$
$(a, b) \in R \cap S$ betyr at$\Leftrightarrow$
$(a, b) \in R$ og $(a, b) \in S$ betyr at$\Leftrightarrow$
aRb og aSb betyr at$\Leftrightarrow$
$aRb \ \wedge \ aSb \Leftrightarrow aTb$
Med 'betyr at' menes her 'er definert som'. Altså:Siden $\Leftrightarrow$ er transitiv er vi ferdige.

Løsning (b)

Refleksiv La $a \in A$ være vilkårlig (Vi må vise aTa). Siden R og S er refleksive, vil aRa og aSa. Dermed er $(a, a) \in R \cap S$, dvs. aTa. Siden a var vilkårlig er altså T refleksiv.

Symmetrisk Anta aTb (Vi må vise at bTa). Da vil aRb og aSb fordi $T = R \cap S$. Siden R er symmetrisk vil bRa, og siden S er symmetrisk vil også bSa. Men da er bTa, altså er T symmetrisk.

Transitiv Anta aTb og bTc (Vi må vise at aTc). Ved $T = R \cap S$ vet vi at aRb og bRc. Siden R er transitiv, vil aRc. Det samme argumentet vil og gi aSc, da S også er transitiv. Altså vil aTc, som var det vi skulle vise.

Løsning (c)

Vi kan ikke håpe på at $R \cup S$ ikke skal være refleksiv (Hvorfor ikke?), og heller ikke at $R \cup S$ ikke skal være symmetrisk (Hvorfor ikke?).
Transitiviteten derimot...
La $A = \{a, b, c\}$ og la $R_1 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}$ og $R_2 = \{(a, c), (c, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}$. Begge er ekvivalensrelasjoner.
Men, i $R = R_1 \cup R_2$ finnes både (b, a) og (a, c), men ikke (b, c), så R er *ikke* transitiv, og altså ingen ekv.rel.

(Vi kan si at symmetri og refleksivitet er lokale egenskaper, mens transitivitet er en global egenskap.)

Oppgave Fra forelesningen 03.03 s. 22–23 (for spesielt interesserte)

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en preordning hvis R er transitiv og refleksiv.

Definer relasjonen S på A ved aSb når $aRb \land bRa$.

(a) Vis at S er en ekvivalensrelasjon på A.

Der er vanlig å skrive A/S for mengden av ekvivalensklasser $E(a)$ til ekvivalensrelasjonen S.

Løsning (a)

- S er refleksiv:
  - La a være et vilkårlig element fra A.
  - Siden R er refleksiv, må aRa.
  - Da holder $aRa \land aRa$.
  - Da holder aSa.
- S er symmetrisk:
  - Anta at aSb, for vilkårlige elementer a og b fra A.
  - Da holder $aRb \land bRa$ per definisjon av S.
  - Da må bSa holde.
- S er transitiv:
  - Anta aSb og bSc, for vilkårlige elementer a, b og c fra A.
  - Per definisjon av S har vi $aRb \land bRa$ og $bRc \land cRb$.
  - Siden aRb og bRc, og R er transitiv, vil aRc.
  - Siden cRb og bRa, og R er transitiv, vil cRa.
  - Da holder $aRc \land cRa$, og dermed aSc.

Oppgave Fra forelesningen 03.03 s. 22–23 (for spesielt interesserte)

Vi definerer en relasjon $\hat{R}$ på A/S ved

$$E(a)\hat{R}E(b)$$

om aRb

(b) Vis at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene $E(a)$ og $E(b)$ vi bruker.

(c) Vis at $\hat{R}$ er en partiell ordning på mengden av ekvivalensklasser.

Løsning (b)

- Anta at aRb, og at $a' \in E(a)$ og $b' \in E(b)$.
- Det er tilstrekkelig å vise at $a'Rb'$, for det betyr at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene vi bruker når vi definerer $\hat{R}$.
- Siden a og a' er i samme ekvivalensklasse, må aSa', det vil si aRa' og $a'Ra$.
- Siden b og b' er i samme ekvivalensklasse, må bSb', det vil si bRb' og $b'Rb$.
- $a'Ra$ og aRb gir at $a'Rb$, siden R er transitiv.
- $a'Rb$ og bRb' gir at $a'Rb'$, siden R er transitiv.
- Tegn figur!

Løsning (c)

- $\hat{R}$ er refleksiv, siden $E(a)\hat{R}E(a)$ holder for alle $E(a)$.
- $\hat{R}$ er transitiv:
  - Anta at $E(a)\hat{R}E(b)$ og $E(b)\hat{R}E(c)$.
  - Da må aRb og bRc.
  - Siden R er transitiv, må aRc.
  - Da må $E(b)\hat{R}E(c)$.
- $\hat{R}$ er antisymmetrisk.
  - Anta at $E(a)\hat{R}E(b)$ og $E(b)\hat{R}E(a)$.
  - Da må aRb og bRa.
  - Da må aSb.
  - Da må $E(a)$ og $E(b)$ være samme ekvivalensklasse.

Oppgave 6.1

Avgjør hvorvidt følgende funksjoner er veldefinerte. For de som er veldefinerte, gi definisjonsområdet, verdiområdet og bildemengden. [Se læreboken på side 107.]

Løsning

	Veldefinert?	Definisjonsområde	Verdiområde	Bildemengde
(a)	Ja	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
(b)	Nei, $g(1)$ er ikke i $\mathbb{J}$.			
(c)	Nei, $h(3) = 4$ er ikke i $\{1, 2, 3\}$.			
(d)	Ja	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
(e)	Ja	$\mathbb{R}$-$\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$-$\{0\}$
(f)	Nei, $ispositive(0)$ er ikke definert.			
(g)	Ja	$\mathbb{N}$	$\mathbb{J}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
(h)	Nei, $\psi(a)$ er den tomme strengen og er ikke med i S.			