

Eksamen MAT1030 07.06.2010

Løsningsforslag

Oppgave 1 For mange vil den naturlige måten å løse denne oppgaven på være å bruke Venn-diagram.

1. er alltid riktig: Vi har at

$$A \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}).$$

Siden

$$A \cap \bar{B} \cap C \subseteq A \cap \bar{B}$$

og

$$A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \subseteq A \cap \bar{B}$$

følger 1.

2. La $A = C = \{0\}$ og $B = \emptyset$. Det gir et moteksempel.

3. La $B = C = \{0\}$ og $A = \emptyset$. Det gir et moteksempel.

Oppgave 2 Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

som har en multippel rot $x = 2$.

Det gir den generelle løsningen

$$f(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n.$$

Oppgave 3 For $n = 1$ har vi både at

$$f(n) = g(0) = 2$$

og at

$$n^3 + n = 1 + 1 = 2.$$

Påstanden holder derfor for $n = 1$. Hvis vi antar at påstanden holder for n bruker vi at

$$(n+1)^3 + (n+1) - (n^3 + n) = 3n^2 + 3n + 2 = g(n)$$

til å vise at påstanden også holder for $n+1$.

Dermed er påstanden vist ved induksjon.

Oppgave 4

- a) Vi ser at nodene 5, 7, 8 og 10 har grad 2, nodene 1 og 4 har grad 3 og nodene 2, 3, 4 og 9 har grad 4.

Det gir at det finnes en Eulersti, men ingen Eulerkrets.

- b) Ved Kruskals algoritme (gjennomgått på forelesningene) vil vi bygge opp det utspennende treet ved å legge til følgende kanter i rekkefølge:

$$(10, 4), (5, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 7), (2, 9), (1, 8), (8, 9), (9, 3).$$

Prims algoritme vil gi det samme treet uansett hvor vi starter.

- c) Rekkefølgen ved bruk av Dijkstras algoritme vil avhenge av i hvilken rekkefølge vi lister kantene.

En løsning vil være å legge kantene i det utspennende treet i følgende rekkefølge:

$$(2, 6), (6, 5), (2, 9), (2, 1), (9, 8), (6, 3), (6, 7), (9, 10), (10, 4).$$

Løsningen er entydig, det finnes bare et mulig tre. Når vi bygger ut treet, vil vi aldri ha et valg hvor alternativene ekskluderer hverandre.

Oppgave 5

- a) Vi har

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

muligheter.

- b) Vi har

$$\frac{11!}{6!} = 55440$$

mulige valg.

Oppgave 6 I to trinn ser vi at unifisering av de to gitte termene krever simultan unifisering av følgende fire par

$$1 + y \text{ og } 1 + 0$$

$$x \text{ og } x$$

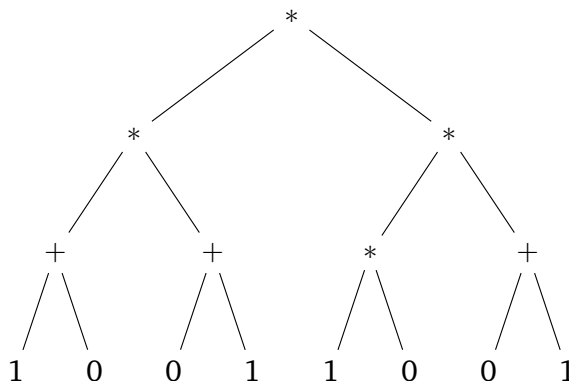
$1 * 0$ og $1 * 0$

x og $y + 1$

Dette er mulig hvis vi setter inn 0 for y og $0 + 1$ for x .
Den mest generelle unifikerte termen blir da

$$((1 + 0) * (0 + 1)) * ((1 * 0) * (0 + 1)).$$

Syntakstreet:



Hvis vi bruker prefix notasjon får vi

$$** +10 + 01 * *10 + 01.$$

Oppgave 7 Når vi deler et binært tall på 2 reduserer vi lengden av representasjonen med 1. I det værste tilfellet vil vi derfor benytte while-løkke m ganger.

I selve while-løkke ser vi på siste siffer en gang, og eventuelt fjerner det. Det betyr at kompleksiteten av hvert enkelt skritt i løkke ikke avhenger av størrelsen på input.

Det gir videre at kompleksiteten er

$$O(m).$$