MAT1030 – Forelesning 5

Utsagnslogikk

Dag Normann - 2. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-02 14:10)

Kapittel 4: Logikk (fortsettelse)

Repetisjon

- Forrige gang snakket vi om *utsagn* og *predikater*, og vi innførte bindeordene (konnektivene) $\wedge$ for **og**, $\vee$ for **eller** og $\neg$ for **ikke**.
- Vi så hvordan vi kunne definere disse tre konnektivene ved hjelp av sannhetsverditabeller.
- Spesielt poengterte vi at $\vee$ står for *inklusiv* eller, det vil si at $p \vee q$ er sann når både p og q er sanne.
- Vi tar opp tråden der vi slapp den.

Sammensatte utsagn

Vi skal snu litt på rekkefølgen av stoffet i forhold til læreboka.

Ved å bruke konnektivene $\wedge$, $\vee$ og $\neg$ har vi gitt utsagnslogikken sin fulle uttrykkskraft.

De konnektivene vi skal se på senere, kan erstattes med sammensatte uttrykk hvor vi bare bruker $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.

Det er faktisk mulig å klare seg med bare $\neg$ og $\wedge$ eller bare med $\neg$ og $\vee$, men da trenger vi sammensatte utsagn som det er vanskelig å lese.

For å fortsette denne diskusjonen, må vi se på hva vi mener med sammensatte utsagn.

Sammensatte utsagn, bruk av parenteser

Vi har sett at $x \neq 0$ egentlig er en alternativ skrivemåte for $\neg(x = 0)$.

Anta at vi i en programmeringssammenheng har bruk for å uttrykke betingelsen

$$x \neq 0 \text{ og } y > 0.$$

Dette burde vi kunne skrive som

$$\neg(x = 0) \wedge y > 0.$$

Hvis p er utsagnet $x = 0$, q er utsagnet $y > 0$ og r er utsagnet $p \wedge q$, skal $\neg r$ være utsagnet $\neg p \wedge q$?

Det var vel ikke det vi mente, $\cdots$, eller?

Sammensatte utsagn og bruk av parenteser

- Vi vil bruke parenteser for å markere rekkevidden av et konnektiv, det vi si, hva vi mener med p og med q når vi skriver $\neg p$, $p \wedge q$ eller $p \vee q$.
- Vi skal gi en mer formell beskrivelse av hvordan vi skal bruke parenteser senere, men praksis fra skolealgebraen er retningsgivende.

- For eksempel skriver vi
$$\neg(x = 0 \wedge y > 0)$$
hvis vi mener å negere hele konjunksjonen, mens vi skriver
$$\neg(x = 0) \wedge y > 0$$
hvis det bare er $x = 0$ som skal negeres.
- For tydligere å se forskjellen, kan vi regne ut sannhetsverditabellen til de to sammensatte uttrykkene $\neg p \wedge q$ og $\neg(p \wedge q)$.
- En sannhetsverditabell for et sammensatt uttrykk vil være en tabell hvor vi har følgende:
  - En kolonne for hver utsagnsvariabel.
  - En kolonne for hver del av det gitte utsagnet.
  - En rad for hver mulig fordeling av sannhetsverdier på utsagnsvariablene.
  - For hvert delutsagn skriver vi den sannhetsverdien delutsagnet vil ha i hver rad ut fra hvilke sannhetsverdier utsagnsvariablene har.

Eksempel ($\neg(p \wedge q)$).

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

Eksempel ($\neg p \wedge q$).

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**

Sammenlikner vi høyresidene i de to eksemplene, ser vi forskjellen:

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge q$
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**

- Rekkevidden til tegnet $\neg$ er det minste korrekte utsagnet som står bak tegnet.

- Skal vi negere et sammensatt utsagn, må vi normalt sette parenteser rundt det sammensatte utsagnet.
- Hvis et utsagn med både $\wedge$ og $\vee$ kan forståes på flere måter, må vi bruke parenteser for å presisere rekkeviddene til de to bindeordene.
- Det er ikke noe i veien for å lage sannhetsverditabeller for sammensatte utsagn med tre eller flere utsagnsvariable.
- I det neste eksemplet skal vi se på et sammensatt utsagn $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$.
- Det finnes 8 forskjellige måter å fordele sannhetsverdiene til tre variable på.
- Det betyr at tabellen vår må ha 8 linjer under streken.
- Med fire variable får vi 16 linjer.
- Det vil ikke få plass på skjermen, så da må vi utvikle andre metoder.

Sammensatte utsagn og sannhetsverditabeller

Eksempel ($(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$).

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel.

- Hvis $x < 3$, så er $x < 5$.
  - Man skal ikke kunne mye matematikk for å mene at dette må være riktig.
- Utsagnene $x < 3$ og $x < 5$ vil anta forskjellige sannhetsverdier avhengig av hva x er.
- Det vil også det sammensatte utsagnet

$$x < 3 \vee \neg(x < 5).$$

- Er det mulig å definere et utsagnslogisk bindeord $\rightarrow$ slik at:
  - Hvis p og q er utsagn, så vil $p \rightarrow q$ være et utsagn slik at sannhetsverdien til $p \rightarrow q$ avhenger av sannhetsverdiene til p og til q?
  - Når x varierer, skal alltid $x < 3 \rightarrow x < 5$ være sant?

Eksempel (Fortsatt).

- La oss se nærmere på $x < 3 \to x < 5$.
- La $p(x)$ stå for $x < 3$ og la $q(x)$ stå for $x < 5$.
- Hvis $x = 2$ vil både $p(x)$ og $q(x)$ få verdien **T**.
  - $p \to q$ bør bli sann når både p og q er sanne.
- Hvis $x = 4$ vil $p(x)$ få verdien **F**, mens $q(x)$ får verdien **T**.
  - $p \to q$ bør bli sann hvis p er usann mens q er sann.
- Hvis $x = 6$ blir både $p(x)$ og $q(x)$ usanne.
  - $p \to q$ bør også bli sann også når både p og q er usanne.

Eksempel.

- Hvis $x^2 > 0$, så er $x > 0$.
- Mange vil protestere på dette!
- Hvorfor?
- Fordi det finnes moteksempler, eksempelvis $x = -1$.
- Et moteksempel er et eksempel på at en ytring ikke alltid er riktig.
- Et moteksempel til et utsagn “Hvis p, så q” vil alltid være et tilfelle hvor p er sann, mens q er usann.
- Det vil derfor være naturlig å la $p \to q$ være usann når p er sann og q er usann.

Definisjon.

- Hvis p og q er to utsagn, så er $p \to q$ også et utsagn.
- $p \to q$ blir sann hvis q er sann eller hvis p er usann.
- Hvis p er sann og q er usann, lar vi $p \to q$ bli usann.
- Vi vil lese “hvis p, så q”.

Vi kan definere $\to$ ved hjelp av følgende sannhetsverditabell.

p	q	$p \to q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

De som har problemer med at vi her sier at det er sant at noe usant medfører noe sant (eller noe usant) får hente støtte i det kjente sitatet fra Ibsen

hvor Udgangspunktet er galest, blir tidt Resultatet orginalest.

Ibsen fanger her inn essensen av vår definisjon av hvordan sannhetsverdien til

$$\mathtt{Udgangspunkt} \rightarrow \mathtt{Resultat}$$

bestemmes av sannhetsverdien til utgangspunktet og til resultatet, og når utgangspunktet er noe som ikke er sant, kan resultatet bli hva som helst.

- Det er ikke så naturlig å bruke $\rightarrow$ i programmeringssammenheng. Derfor gir vi ingen eksempler hvor $\rightarrow$ brukes i kontrollstrukturer.
- Læreboka bruker ordet *implies* i forbindelse med $\rightarrow$.
- Dette er litt uheldig, fordi det lett fører til en sammenblanding av symbolene $\rightarrow$ og $\Rightarrow$.
- $x < 5 \Rightarrow x < 3$ er regelrett feil, mens $x < 5 \rightarrow x < 3$ er sant for noen verdier av x og usant for andre.
- Dette utdypes mer under forelesningen.

Oppgave.

(a) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p$$

(b) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

(c) Hva ser du i kolonnen lengst til høyre?

- Når vi bruker "hvis-så" i dagligtale, kan vi få noe meningsløst ut av det.
- I de eksemplene som følger kan vi diskutere om tolkningen som logikken forteller oss er riktig stemmer overens med den tolkningen vi vil legge i ytringen som vanlig kommuniserende mennesker:

Eksempel.

- Hvis Noah hadde lært dyrene å svømme, så ville jorda vært overbefolket av løver.
- Hvis ulven spiser Rødhette, vil det bli en Grimm historie.
- Du får gå på kino hvis du vasker opp etter maten.
- Hvis dere avholder reelle demokratiske valg, vil vi gi støtte til oppbyggingen av infrastrukturen.

- I det nest siste eksemplet gis det ikke rom for å få gå på kino hvis oppvasken ikke tas, og i det siste eksemplet er tilbudet om økonomisk støtte helt klart knyttet til kravet om demokrati.
- Oppvask vil være både en nødvendig og en tilstrekkelig betingelse for kinobesøk.

- Vi innfører et siste konnektiv, $\leftrightarrow$ som skal fange opp hvis og bare hvis i samme forstand som $\rightarrow$ fanger opp hvis-så.

Definisjon.

- Hvis p og q er utsagn, er $p \leftrightarrow q$ et utsagn.
- $p \leftrightarrow q$ er sant når både p og q er sanne, og når både p og q er usanne.
- $p \leftrightarrow q$ er sant når p og q har den samme sannhetsverdien.

Vi kan selvfølgelig også definere $\leftrightarrow$ ved en sannhetsverditabell:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Legg merke til at om vi skriver ut sannhetsverditabellene for

- $p \leftrightarrow q$
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

får vi den samme kolonnen lengst til høyre.
Det er en passende treningsoppgave å skrive ut de to siste tabellene.

Eksempel $(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**T**

Eksempel.

De to neste eksemplene blir bare gjennomgått på tavla:

- $p \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow p)$
- $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$