MAT1030 – Forelesning 13

Funksjoner

Dag Normann - 2. mars 2010

(Sist oppdatert: 2010-03-02 14:15)

Kapittel 6: Funksjoner

Forrige uke

- Forrige forelesning snakket vi om relasjoner.
- Vi snakket om ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.
- Vi definerte partielle ordninger og totale ordninger.
- Deretter begynte vi å snakke litt om funksjoner.
- Det skal vi fortsette med nå.
- Vi gjentar de siste minuttene fra onsdag.
- Før det: Er det noen spørsmål?

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som
  - Heltallsverdien til $\frac{n}{m}$.
  - Primtall nr. n.
  - Største felles divisor av n og m.

  Felles for alle disse eksemplene er at det er en sammenheng mellom

  argumentet eller argumentene

  til funksjonen, og

  verdien

  til funksjonen.

  Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor
  - Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
  - Boksen bearbeider dataene.
  - Boksen gir oss funksjonsverdien.

  Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.
  Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.
  Vi skal stort sett holde oss til presisjonsnivået i boka.

Hovedpoenget er at vi skal tolke ordet *regel* på neste side så liberalt som mulig.

For fullstendighetens skyld, skal vi, om noen minutter, ta med den vanlige formelle definisjonen av hva en funksjon er.

Definisjon.

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk.

- Som sagt skal ordet *regel* tolkes så liberalt som mulig, men, som vi skal se, med en smule forsiktighet.
- Det er ikke noe krav om at det skal foreligge noen regler som mennesker eller maskiner kan følge.
- Det eneste kravet er at $f(x)$ skal fins i Y, og at uttrykket $f(x)$ ikke kan være flertydig.

Eksempler

Eksempel (Funksjoner).

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.
- La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og la A være en delmengde av $\mathcal{E}$
- Vi definerte $\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} \ : \ x \notin A\}$.
- Hver A har en og bare en komplement-mengde, så $f(A) = \overline{A}$ er en funksjon.
- Her er X lik Y lik potensmengden til $\mathcal{E}$.
- På samme måte kan vi oppfatte $\cap$ og $\cup$ som funksjoner.
- Hvis Y er potensmengden til $\mathcal{E}$ og $X = Y^2$, vil $\cap$ og $\cup$ være funksjoner fra X til Y.

Eksempel.

- Quicksort er en algoritme som sorterer elementene i en liste etter størrelse.
- Quicksort gir mening hver gang listen er hentet fra en totalt ordnet mengde.
- Da beregner Quicksort funksjonen som tar en vilkårlig liste som argument og gir den sorterte listen som verdi.

- Vi kan finne en annen algoritme Slowsort for sortering av elementene i en liste, og den vil definere den samme funksjonen, men være en annen algoritme.
- Det er forbindelsen mellom argument og verdi som bestemmer hvilken funksjon vi har, ikke hvordan vi kommer fra argument til verdi.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjon.

a) Hvis $f : X \to Y$ er en funksjon kaller vi
   - X for definisjonsområdet til f.
   - Y for verdiområdet til f.

b) Bildet eller bildemengden til f er

$$\{f(x)\ :\ x \in X\}$$

c) Vi kan skrive $f[X]$ for bildet til f.

Eksempel.

- Definer $f(x) = e^x$ som en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

  Da vil:
  - *Definisjonsområdet* til f være hele $\mathbb{R}$.
  - *Verdiområdet* til f være hele $\mathbb{R}$.
  - *Bildet* til f være mengden av positive reelle tall.

Eksempel.

- La $A \subseteq \mathcal{E}$ være en mengde, og definer

$$f_A(B) = A \cap B$$

  som en funksjon fra potensmengden X til $\mathcal{E}$ til seg selv.
- Da er X både definisjonsområdet og verdiområdet til f_A, mens bildemengden vil være potensmengden til A.

Eksempel.

- Innledningsvis i disse forelesningene konstruerte vi en pseudokode for å beregne $|n-m|$ fra n og m.
- I dette tilfellet var definisjonsområdet mengden av par av ikke-negative hele tall, verdiområdet og bildemengden lik mengden av ikke-negative hele tall.
- Da vi satte opp sannhetsverditabeller for sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p, q og r, konstruerte vi i virkeligheten funksjoner fra mengden X av tripler fra $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ til $Y = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$.

  To sammensatte utsagn er logisk ekvivalente når disse funksjonene er like.

- En sannhetsverditabell beskriver egentlig en funksjon på tabellform.
- I prinsippet kan alle funksjoner hvor definisjonsområdet er en liten, endelig mengde beskrives på tabellform.
- Vi illustrerer det på tavlen.
- En alternativ måte å beskrive slike funksjoner er ved å bruke et pildiagram, se illustrasjon på tavlen.

Merk.

- Læreboka bruker *domain* for definisjonsområde og *codomain* for verdiområde.
- Det er ikke uvanlig å bruke ordene *domene* og *kodomene* på norsk.
- Vi skal holde oss til betegnelsene *definisjonsområde* og *verdiområde* i disse forelesningene.

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

En funksjon fra A til B er en delmengde $f \subseteq A \times B$ slik at

- For alle $a \in A$ finnes en og bare en $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$.
- Vi skriver $b = f(a)$ for $(a, b) \in f$.

Hvis man skal bruke mengdelæren til å legge et grunnlag for matematikken, er dette den *offisielle* definisjonen av hva en funksjon er.

Her er regelen for å beregne $f(a)$ at

$$f(a) \text{ er den } b \text{ som er slik at } (a, b) \in f.$$

Vi skal fortsette med det presisjonsnivået vi har lagt opp til.

Injektive funksjoner

- Funksjoner har en ting felles med relasjoner:

  Noen av dem har spesielle egenskaper som er verd en egen betegnelse.

- Vi skal først se på injektive funksjoner.
- Andre betegnelser er 1-1-funksjoner og enentydige funksjoner.

Eksempel (Injektive funksjoner).

- La w være et 32-bits binært tall, og la $f(w)$ være det heltallet som representeres av w.
- Hvis $v \neq w$ vil $f(v) \neq f(w)$ siden vi ikke bruker to forskjellige binære representasjoner av det samme tallet.
- Hvis vi oppfatter f som en *input-output*-forbindelse, ser vi at det er én input per output.
- Dette er et eksempel på en en-til-en-funksjon eller *injektiv* funksjon.

Eksempel (Fortsatt).

- En telefonselger vil ha datastøttet oppringing til kunder.
- For ikke å irritere kundene unødig, bør ikke telefonselgeren kontakte samme kunde to ganger.
- Hvis $R(n)$ er kunde nummer n selgeren kontakter, betyr dette kravet at $R(n) \neq R(m)$ når $n \neq m$.
- Programmet selgeren støtter seg på må være slik at oppringningsfunksjonen R blir injektiv, eller enentydig.

Den formelle definisjonen vil være:

Definisjon.

La $f : X \to Y$ være en funksjon.

f kalles injektiv hvis vi for alle x og y i X har at

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Merk.

- Vi har brukt den kontrapositive versjonen i definisjonen.

  En ekvivalent formulering vil være

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Eksempel (Injektive funksjoner).

- La $f(x) = x^2$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

Da er ikke f injektiv fordi $1 \neq -1$ mens $f(1) = f(-1)$.

- Hvis vi begrenser definisjonsområdet til de ikke-negative tallene $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ blir funksjonen injektiv.
- Funksjonen som ordner en sekvens av ord alfabetisk er ikke injektiv, fordi ord-sekvensene "Per, Pål, Espen" og "Espen, Pål, Per" er forskjellige, men de blir like når vi ordner dem alfabetisk.

Eksempel.

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt verdiområdet, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.
- Vi ser derfor på f som en funksjon

$$f : A \to \mathbb{N}$$

Eksempel (Fortsatt).

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så f er ikke injektiv.
- Kan vi bestemme bildemengden til f?
- Bildemengden vil være $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 18\}$.

Eksempel (Fortsatt).

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
- Når vi har relasjoner som dette, bør vi stille følgende spørsmål:
  - Er R eller S refleksiv?
  - Er R eller S irrefleksiv?
  - Er R eller S symmetrisk?
  - Er R eller S antisymmetrisk?
  - Er R eller S transitiv?

Eksempel (Fortsatt).

- La oss se på R først.
  1. Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  2. Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  3. Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
  4. Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.
  5. Siden f ikke er injektiv og R er symmetrisk, kan ikke R være *antisymmetrisk*.
- 1., 2. og 3. viser at R er en ekvivalensrelasjon.
- Vi har ikke brukt noen spesielle egenskaper ved A eller f, så relasjoner konstruert på denne måten vil alltid være ekvivalensrelasjoner.

Eksempel (Fortsatt).

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$
  4. $\{4, 13, 22, 31, 40\}$
  5. $\{5, 14, 23, 32, 41, 50\}$

     osv.

Eksempel (Fortsatt).

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    * Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    * Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er *transitiv*.
  - Anta at aSb og bSa
    * Da må $f(a) \leqslant f(b)$ og $f(b) \leqslant f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.
    * Da er $a \leqslant b$ og $b \leqslant a$ så $a = b$
  - Det følger at S er *antisymmetrisk*.
- Konklusjonen er at S er en partiell ordning.

Følgende oppgave skal leses i sammenheng med teksten på de foregående sidene.

Oppgave.
Vis at S er en total ordning, og skriv ned de 10 S-første tallene.

Eksempel (Injektive funksjoner).

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.
  2. B er mengden av uendelige desimalutviklinger α og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.
  3. C er mengden av positive reelle tall som har en eksakt 32-bits representasjon r, og hvis r representerer tallet x lar vi $h(r)$ være tallet som representerer $\sqrt{x}$.
- f vil være injektiv, for hvis vi speiler to forskjellige ord, vil speilbildene bli forskjellige.

Eksempel (Fortsatt).

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24}, vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12}.

  Vi har altså langt færre binære tall til disposisjon for å representere $\sqrt{x}$ enn x selv, så funksjonen kan ikke være injektiv.
- Her har vi egentlig brukt noe som kalles skuffeprinsippet, dueslagsprinsippet eller på engelsk the pigeon hole principle.