MAT1030 – Forelesning 7

Logikk, predikatlogikk

Dag Normann - 9. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 14:24)

Kapittel 4: Logikk (predikatlogikk)

Predikatlogikk

- Vi brukte hele forrige uke til å innføre utsagnslogikk.
- Vi lærte å sette opp sannhetsverditabeller, vi så på sentrale begreper som
  - tautologi
  - kontradiksjon
  - logisk ekvivalens
  - logisk konsekvens

  og vi så på måter vi kan regne med utsagnslogiske uttrykk på.
- Når vi er ferdige med avsnittet om predikatlogikk, skal vi presisere læringsmålene nærmere.
- Vi startet såvidt med predikatlogikk sist uke.
- Vi skal ta opp igjen eksemplet fra onsdag.

Eksempel.

Anta at vi vet følgende:

- All fluesopp er giftig.
- Det fins sopp som ikke er giftig.

Da konkluderer vi med:

- Det fins sopp som ikke er fluesopp.

Eksempel.

Anta at vi vet følgende:

- Alle kvadrattall er $\geqslant 0$.
- Det fins tall som ikke er $\geqslant 0$

Da konkluderer vi med:

- Det fins tall som ikke er kvadrattall.

Dette er det samme argumentet i to forkledninger.

- Da vi innledet utsagnslogikken definerte vi et predikat som en ytring med variable, som ville bli sann eller usann hver gang vi gir variablene verdier.
- I det første eksemplet kan vi betrakte *sopp* som en variabel som kan ta en hvilken som helst sopp som verdi.
- Da blir f.eks. *soppen er giftig* og *soppen er en fluesopp* predikater.
- I det andre eksemplet er *tall* en variabel som kan ta alle hele tall som verdi. Da er *tallet er et kvadrattall* og *tallet er* $\geqslant 0$ predikatene.
- Det gjenstår å betrakte uttrykk som *alle sopper* og *det fins tall* som en del av en utvidet logisk struktur.

Eksempel.

- La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en funksjon.
- Hvordan skal vi uttrykke

$$f \text{ har et minimumspunkt?}$$

- *Løsning*:
  Det fins en $x \in [a, b]$ slik at for alle $y \in [a, b]$ vil $f(x) \leqslant f(y)$.

Det å finne egne symboler for det fins og for alle blir mer og mer påtrengende.

- Vi ser på et eksempel til:

Det fins ikke noe største primtall

- Vi prøver med litt utsagnslogikk:

$\neg$*(Det fins et største primtall)*

- Det vil si at det er ikke slik at det fins et primtall som er større eller lik alle primtallene.
- Vi trenger et mer formelt språk for å få orden på dette!

Kvantorer

Definisjon.

- Hvis P er et predikat og x er en variabel, vil

$$\exists x P$$

uttrykke at det fins en verdi av x slik at P holder.

$$\forall x P$$

uttrykker at P holder for alle verdier x kan ha.

Vi kaller $\exists$ og $\forall$ for kvantorer, og vi regner dem som en del av det formelle logiske vokabularet. Vi skal utdype denne definisjonen senere.

Eksempel.

a)

$$\exists x (x \in [a, b] \land \forall y (y \in [a, b] \to f(x) \leqslant f(y)))$$

uttrykker at det fins et minimumspunkt for f på $[a, b]$.

b)

$$\neg \exists x (x \text{ primtall} \land \forall y (y \text{ primtall} \to y \leqslant x))$$

uttrykker at det ikke fins et største primtall.

- Det kan være lurt å øve seg på å skrive uttalelser i dagligtale om til utsagn med kvantorer, men for det meste vil vi bruke kvantorer når vi trenger matematisk presisjon i matematikk eller informatikk.
- Vi skal se på noen eksempler på hvordan man oversetter fra dagligtale til formelt språk og omvendt.
- Flere eksempler fins i læreboka.

Eksempel.

- *Alle hunder har lopper, men ikke alle hunder har lus.*

  $\forall x\ (\text{hund } x \rightarrow \exists y(\text{loppe } y \wedge x \text{ har } y))\wedge$

  $\neg\forall x\ (\text{hund } x \rightarrow \exists y(\text{lus } y \wedge x \text{ har } y))$
- *Alle har et søskenbarn på Gjøvik.*

  $\forall x \exists y(y \text{ bor på Gjøvik} \wedge y \text{ er søskenbarn til } x)$
- *Ingen er bedre enn Tor til å fiske laks*

  $\neg\exists x(x \text{ er bedre enn Tor til å fiske laks })$

Eksempel.

- $\forall x \forall y(\exists z(\text{far}(z, x) \wedge \text{far}(z, y)) \rightarrow \text{brødre}(x, y))$

  Hvis to personer har en felles far, er de brødre.

  Dette er selvfølgelig ikke sant, for de kan være søstre.
- $\forall x \exists y(x \text{ har slått } y \wedge y \text{ har slått } x)$

  La oss si at dette dreier seg om fotballag.

  For alle lag fins det et annet lag slik at de har slått hverandre.
- $\neg\forall x \exists y(y \text{ er bestevennen til } x)$

  Ikke alle har en bestevenn.

Det er ikke alltid at den underforståtte logiske strukturen fremkommer av et utsagn i dagligtale:

Eksempel.

Vi har følgende sitat fra høytaleranlegget til NSB 09.02.2010:

Lokaltog til Skøyen klokken 06.50 er innstilt.

Det skyldes *ikke* tilgjengelig materiell.

Her er det uklart (?) hva *ikke* peker på, og det er en underforstått kvantor: Det fins tilgjengelig matriell.
For å fange opp uttrykk som det skyldes, trenger man modallogikk.
Modallogikk står sterkt på IfI.

Eksempel.
(a) $\exists x \forall y (x \leqslant y)$ (b) $\forall y \exists x (x \leqslant y)$

- Rekkefølgen vi skriver kvantorene i betyr mye for hva utsagnet sier:
  (a) sier at det fins et minste objekt.
  (b) sier at det alltid fins et objekt som er mindre eller lik.
- Hvis x varierer over de hele tallene er a) feil, mens b) holder.
- Hvis x varierer over de naturlige tallene, holder a), og b) holder også, fordi for gitt en verdi for y kan vi bruke samme verdi for x.
- Før vi kan bestemme om et utsagn med kvantorer er sant eller usant, må vi vite hvilke mulige verdier variablene kan ta.
- I en programmeringssammenheng vil vi alltid deklarere datatypen til en variabel, og da kan variabelen ta alle verdier i denne datatypen.

  Når er et utsagn med kvantorer logisk holdbart?

  La oss betrakte følgende eksempel:

Eksempel.

$$\forall x \forall y \forall z ((x < y \land y < z) \to x < z).$$

- Selv om vi ikke har bestemt oss for hvilke verdier x, y og z kan ta, uttrykker dette en sammenheng som vi mener er underforstått når vi bruker symbolet $<$.
  - La x, y og z variere over deltakerne i en sjakkturnering.
  - Hvis S_1 og S_2 er to sjakkspillere, så kan vi si at $S_1 < S_2$ hvis S_1 tapte for S_2 i minst et parti.
  - Det er ofte at vi kan finne tre spillere som "slår hverandre".
  - I denne situasjonen er utsagnet over *ikke sant*.

Definisjon.
- Et predikat er en ytring
  $$P(x_1, \dots, x_n)$$
  hvor det kan forekomme variable.
- Hvis P er et predikat og x er en variabel, er $\exists x P$ og $\forall x P$ nye predikater hvor variabelen x er bundet.
- Variable som ikke er bundet kalles frie.
- Hvis vi setter inn (lovlige) verdier for de frie variablene i et predikat får vi et utsagn.
- For å bestemme om et utsagn er sant eller usant må vi bestemme variasjonsområdene til alle variablene samt hva andre symboler skal stå for.

Definisjon (fortsatt).

- En setning er et predikat uten frie variable. Dette kalles også ofte for et lukket utsagn.
- En setning er logisk gyldig dersom den er sann uansett hvilke variasjonsområder vi velger og uansett hva vi lar symbolene bety.

Denne definisjonen er ikke matematisk sett helt presis, men den holder for vårt formål.

Eksempel.

- $x < y \to \neg(y < x)$ er et predikat med to frie variable, x og y.
- $\exists x(x < y \to \neg(y < x))$ er et predikat med en fri variabel y og en bunden variabel x.
- $\forall y \exists x(x < y \to \neg(y < x))$ er en setning, fordi begge variablene er bundne.
- For å bestemme om denne setningen er sann eller usann, må vi bestemme oss for hvilke verdier x og y kan ta, og for hva vi mener med $x < y$.
- Hvis vi lar x og y variere over $\mathbb{Z}$ og $<$ være vanlig ordning, kan vi vise at setningen er sann på vanlig matematisk måte.

Eksempel ($\forall y \exists x(x < y \to \neg(y < x))$).

- Beviset kan formuleres slik;

  La y få en vilkårlig verdi a

  La x også få verdien a.

  Siden $a < a$ er usant, må $\neg(a < a)$ være sant, og sannhetsverdien til

  $$x < y \to \neg(y < x)$$

  blir **T** når vi setter inn a for både x og y.

  Merk at a var vilkårlig da vi satte a inn for y, men valgt med omhu da vi satte a inn for x.
- Dette gir oss ingen grunn til å mene at setningen er logisk gyldig.

- Ved hjelp av læreboka listet vi opp en rekke regneregler for utsagnslogikk.
- Det fins tilsvarende regler for regning med uttrykk med kvantorer.
- En alternativ måte er å isolere noen utsagn i predikatlogikk som aksiomer og fastsette noen regler for hvordan man kan bevise andre utsagn fra disse aksiomene.
- Dette er noe som tas opp på et senere trinn i emner både ved Institutt for Informatikk og ved Matematisk Institutt.
- Vi skal se på et par regneregler som vil være utledbare i en slik logikk, men hvor vi kan overbevise oss om gyldigheten her og nå.

- Vi definerte $\equiv$ som en relasjon mellom utsagnslogiske utsagn, men vil utvide bruken til utsagn med kvantorer, når utsagnene åpenbart er sanne under nøyaktig de samme omstendighetene.

Eksempel (DeMorgans lover for kvantorer).
For alle utsagn A og variable x vil

1. $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$
2. $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$

- Noen ganger kan det være lettere å argumentere for en abstrakt påstand ved å gi et dekkende eksempel.
- Vi kan argumentere for 1 ved følgende eksempel som dekker alle andre eksempler:
- Vi mener det samme når vi sier
  - Det er feil at alle russere er katolikker.
  - Det fins en russer som ikke er katolikk.
- Vi kan argumentere for 2 ved følgende eksempel:
- Vi mener det samme når vi sier
  - Det fins ingen ærlig politiker.
  - For alle politikere gjelder det at de ikke er ærlige.

Eksempel (Sammentrekning av kvantorer).
For alle utsagn A og B gjelder

1. $\exists x A \vee \exists x B \equiv \exists x(A \vee B)$
2. $\forall x A \wedge \forall x B \equiv \forall x(A \wedge B)$

- Om vi sier

  Det fins en elev i klassen som spiller tennis
  eller det fins en som spiller badminton

  mener vi det samme som om vi sier

  Det fins en elev i klassen som spiller tennis eller badminton.

- Om vi sier

  Alle arbeiderne fikk høyere lønn
  og alle arbeiderne fikk kortere arbeidstid

  mener vi det samme som om vi sier

  Alle arbeiderne fikk høyere lønn og kortere arbeidstid

- Igjen er disse eksemplene dekkende for den generelle situasjonen.
- Det er *VIKTIG* at man ikke trekker $\exists$ over en $\wedge$ eller en $\forall$ over en $\vee$.

Eksempel (To moteksempler).

- Utsagnet

  Noen Nordmenn er mangemillionærer
  og noen Nordmenn lever under fattigdomsgrensen

  er på formen

  $$\exists x M(x) \wedge \exists x F(x).$$

  Utsagnet

  $$\exists x (M(x) \wedge F(x))$$

  uttrykker at noen Nordmenn både er mangemillionærer og samtidig lever under fattigdomsgrensen.

Eksempel (To moteksempler, fortsatt).

- Den første påstanden er nok sann, mens den andre er heller tvilsom.
- Det betyr at de to utsagnene ikke er logisk ekvivalente.

Eksempel (To moteksempler, fortsatt).

- Utsagnet

  Alle barna får tilbud om å stå slalåm eller å gå langrenn

  er på formen

  $$\forall x (S(x) \vee L(x)).$$

  Utsagnet

  $$\forall x S(x) \vee \forall x L(x)$$

  sier at det er det samme tilbudet til alle barna, mens det første utsagnet gir muligheten for at det er et valg.

  Utsagnene er derfor ikke logisk ekvivalente.

Mer om kvantorer

Eksempel.

- Den tekniske definisjonen av at en funksjon f er kontinuerlig i et punkt x er:

  $$\forall \epsilon \exists \delta \forall y (\epsilon > 0 \to \delta > 0 \wedge (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon))$$

- Hvis vi skal uttrykke at f ikke er kontinuerlig i x må vi negere denne setningen.
- I første omgang bruker vi deMorgans lover for kvantorene, og får

$$\exists\epsilon\forall\delta\exists y\neg(\epsilon > 0 \to \delta > 0 \land (|x-y| < \delta \to |f(x)-f(y)| < \epsilon))$$

Eksempel (Fortsatt).

- Ved deretter å bruke reglene for utsagnslogikk kan vi skrive om

$$\neg(\epsilon > 0 \to \delta > 0 \land (|x-y| < \delta \to |f(x)-f(y)| < \epsilon))$$

  til

$$\epsilon > 0 \land (\delta \leqslant 0 \lor (|x-y| < \delta \land |f(x)-f(y)| \geqslant \epsilon))$$

- Vi har tillatt oss å skrive $\geqslant$ i stedenfor $\neg <$.
- Hele uttrykket blir da

$$\exists\epsilon\forall\delta\exists y(\epsilon > 0 \land (\delta \leqslant 0 \lor (|x-y| < \delta \land |f(x)-f(y)| \geqslant \epsilon)))$$

Eksempel (Fortsatt).

- Det er usikkert om noen får lyst til å studere analyse etter dette.
- Det illustrerer imidlertid at det krever god kontroll over bruk av kvantorer og konnektiver å kunne finne ut av hva det betyr at en viktig matematisk definisjon *ikke* holder i en gitt situasjon.
- Det illustrerer også at det kan gi bedre leselighet om vi "flytter" noe av det som uttrykkes gjennom utsagnslogikk til en begrensning av virkeområdet til kvantoren:

$$\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0\forall y(|x-y| < \delta \to |f(x)-f(y)| < \epsilon)$$

  hvor negasjonen blir

$$\exists\epsilon > 0\forall\delta > 0\exists y(|x-y| < \delta \land |f(x)-f(y)| \geqslant \epsilon).$$

Oppsummering

Læringsmålene for kapitlet om logikk er:

1. Definisjonene av utsagn og predikat, og å kunne bestemme hvilke ytringer som er utsagn, hvilke som er predikat og hvilke som faller utenfor rammene våre.
2. De logiske bindeordene $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$ og $\leftrightarrow$ og hvordan de defineres via sannhetsverditabeller.
3. Sette opp sannhetsverditabellen til et sammensatt uttrykk, og bruke denne til å bestemme om et utsagn er en tautologi, en kontradiksjon eller ingen av delene.

4. Kjenne til logikkens lover og i noen utstrekning kunne bruke dem.
5. Spesielt sentralt står deMorgans lover og de distributive lovene.
6. Kjenne definisjonene av kvantorene $\forall$ og $\exists$ og kjenne deMorgans lover for kvantorer.
7. Kunne uttrykke en sammenheng ved bruk av kvantorer og kunne "forstå" et uttrykk som inneholder kvantorer.

Relevans for informatikk?

- Et naturlig spørsmål nå vil være om predikatlogikk har noen relevans for informatikk.
- Det er ikke naturlig å bruke kvantorer i testuttrykk i pseudokoder, kontrollstrukturer eller i programmeringsspråk bygget over pseudokodefilosofien.
- Grunnen er at det generelt ikke fins noen algoritme for å bestemme om en setning er sann eller usann.
- Hvis kvantorene skal variere over data lagret i en base, trenger ikke sannhetsverdiene til utsagn med kvantorer å være stabile.
- Vi skal se på to eksempler som antyder hvordan bruk av predikater og til dels kvantorer kan være nyttige i en informatikksammenheng.