MAT1030 – Forelesning 21

Mer kombinatorikk

Dag Normann - 13. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-13 14:15)

Kapittel 9: Mer kombinatorikk

Oppsummering

- Forrige uke startet vi på kapitlet om kombinatorikk.
- Vi så på hvordan vi kan finne antall måter å fordele n like objekter på k ulike beholdere på.
- Dette skal vi komme tilbake til.
- Vi så på inklusjons- og eksklusjomsprinsippet:

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$

- Videre så vi på multiplikasjonsprinsippet.
- Det skal vi fortsette med i dag.

Multiplikasjonsprinsippet

Etter dagens forelesning skal følgende oppgave være lett:

Oppgave.

a) Vi skal fordele syv like hvite kuler og seks like røde kuler på fire forskjellige bokser.

Hvor mange måter kan dette gjøres på?

b) Hvis vi krever at de hvite kulene skal ligge i de tre første boksene og de røde i de tre siste, hvor mange mulige fordelinger har vi da?

c) Løs a) hvis vi i utgangspunktet bare hadde tre bokser, og sammenlikn svaret med svaret fra b).

Forklar det du observerer.

- Multiplikasjonsprinsippet:
  Hvis vi skal treffe en serie uavhengige valg, vil det totale antall muligheter være produktet av antall muligheter ved hvert valg.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

  Antall elementer i det kartesiske produktet $A \times B$ er antall elementer i A multiplisert med antall elementer i B.

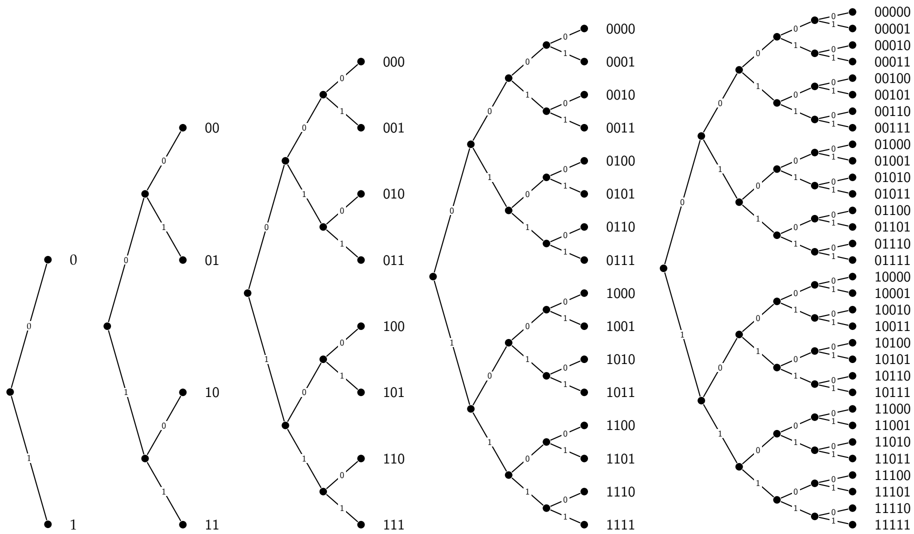
- Både inklusjons- og eksklusjonsprinsippet og multiplikasjonsprinsippet kan generaliseres til flere enn to mengder.

– Generaliseringen av inklusjons- og eksklusjonsprinsippet til tre mengder ses ved hjelp av Venn-diagrammer. Det vil vi ikke få bruk for.
– Generaliseringen av multiplikasjonsprinsippet blir

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Det vil vi få bruk for.

Eksempel - det er 2^n binære tall av lengde n

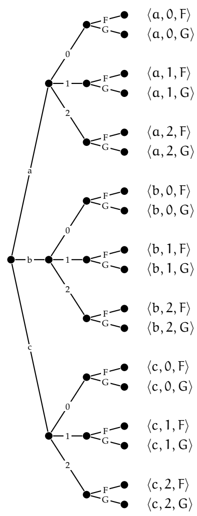


Eksempel - $\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}$

Multiplikasjonsprinsippet gir oss følgende:

$$\begin{aligned}
&|\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}| \\
&= |\{a, b, c\}| \cdot |\{0, 1, 2\}| \cdot |\{F, G\}| \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 2 \\
&= 18
\end{aligned}$$

Vi kan illustrere det slik:



Permutasjoner

- Det neste vi skal se på er hva vi mener med en permutasjon og på hvordan vi kan telle opp antall permutasjoner av en ordnet mengde.

- En permutasjon er en endring av en rekkefølge, eller en omstokking.
- Når vi stokker en kortstokk er poenget at kortene skal ligge i en annen rekkefølge, og med et fremmedord kan vi si at vi permuterer kortene.
- Vi skal se på noen eksempler.

Eksempel.

- På hvor mange forskjellige måter kan vi skrive tallene 1, 2 og 3 i rekkefølge?
- Vi har tre valg for hvilket tall vi vil skrive først: 1, 2 eller 3.
- For hvert av disse valgene har vi to valg for hvilket som blir det neste tallet:

  Starter vi med 1 må det neste tallet være 2 eller 3, starter vi med 2 må det neste tallet være 1 eller 3 og starter vi med 3 må det neste tallet være 1 eller 2.
- Har vi bestemt hvilke to tall vi skriver først, gir det siste tallet seg av seg selv.
- Det fins altså $3 \cdot 2 = 6$ måter å skrive disse tre tallene i rekkefølge på.

Eksempel.

- Hvis vi utvider eksemplet vårt fra forrige side til å omfatte tallene 1, 2, 3 og 4 vil antall permutasjoner vokse til $4! = 24$ og tar vi med 5 i tillegg er antallet $5! = 120$.
- I det siste tilfellet har vi først fem valg for hvilket tall som skal skrives først, deretter fire valg for tall nr. 2, tre valg for tall nr. 3 og to valg for tall nr. 4. Det siste tallet gir seg selv.
- Generelt fins det $n!$ permutasjoner av tallene $1, \ldots, n$.
- Dette svarer også til hvor mange rekkefølger vi kan sette n elementer i. Eksempelvis kan syv studenter ordnes på $7! = 6720$ måter.

Definisjon (Permutasjon).

En *permutasjon* er en endring av rekkefølgen av elementene i en ordnet mengde. Vi sier også at en *permutasjon* av en mengde er en ordning av elementene i mengden.
Her bruker vi ordet *permutasjon* slik boka tillater det, men det vanlige er å oppfatte en permutasjon som en omstokking, elementene bytter plass med hverandre.

Eksempel.

Permutasjonene av $\{A, B, C\}$ er ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- Det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer.

- Og vi vet (selvfølgelig) at $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$
- I eksempelet har vi 3 elementer og $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutasjoner.

Eksempel.

- Et kjent problem i litteraturen er Den handelsreisendes problem (The traveling salesman).
- Hvis vi har gitt n byer som skal besøkes, og vi kjenner avstanden mellom to og to av byene, hva er da den korteste veien gjennom alle byene?
- Det er ennå ingen som har kommet opp med et program som løser dette problemet når antall byer er stort, som for eksempel alle tettsteder i Norge med mer enn 300 innbyggere.
- Vi skal se på hva dette problemet kan ha med antall permutasjoner å gjøre.

Eksempel (Fortsatt).

Hvis antall byer som skal besøkes er mindre, blir selvfølgelig oppgaven gjennomførbar.

Anta at vi har fått i oppdrag å skrive et program som finner den korteste reiseruten fra by A til by B, og som går gjennom ti andre byer $C_1, \ldots, C_{10}$ i en eller annen rekkefølge.

Igjen kan vi anta at alle avstander er kjent.

En måte å gjøre dette på er å liste opp alle mulige rekkefølger vi kan besøke byene $C_1, \ldots, C_{10}$ i, regne ut alle reiselengdene og så velge ut den korteste.

Problemet er at det fins $10! = 3.628.800$ forskjellige rekkefølger vi kan velge mellom.

Eksempel (Fortsatt).

- Det betyr altså at det fins over tre og en halv million måter å reise fra Oslo til Kirkenes på, når reisen skal gå via
  - Kristiansand
  - Stavanger
  - Bergen
  - Molde
  - Kristiansund
  - Trondheim
  - Bodø
  - Narvik
  - Tromsø
  - Alta

Eksempel (Fortsatt).

Øker vi antall byer som skal besøkes til 12, hvis vi for eksempel vil besøke Haugesund og Levanger i tillegg, vil vi være i nærheten av 400.000.000 enkeltruter, og da begynner de raske maskinene å slite.

Det vil gå flere generasjoner maskiner mellom hver gang vi kan øke antall byer med 1 hvis vi bruker denne naive måten.

Eksempel (Fortsatt).

- Det man i praksis gjør er å akseptere at det er dumt å bruke år på å finne ut av om man kan spare noen få kilometers reise, og utvikler raske algoritmer som gir effektive reiseruter, uten å garantere at den finner den mest effektive.
- Det fins elektroniske reiseplanleggere som må forene hensynet til kort regnetid og et godt resultat.
- Tilsvarende optimeringsproblemer finner man for effektiv utnyttelse av lagerplass, effektiv organisering av produksjonsleddene i en bedrift og liknende.

Eksempel.

- Dette eksemplet er stjålet fra en tidligere lærebok i diskret matematikk, den gang det het MA 108.
- Hvor mange ord kan vi skrive ved hjelp av bokstavene i

  MISSISSIPPI?
- Det er 11 bokstaver, og har vi en blytype for hver bokstav, kan vi sette disse i 11! forskjellige rekkefølger.
- Det gir oss 39 916 800 forskjellige rekkefølger.

Eksempel (Fortsatt).

- Rekkefølgen vi setter de to P'ene i, betyr imidlertid ikke noe for resultatet. Det alene halverer antall ord vi kan skrive.
- Det er fire I'er og fire S'er. Den innbyrdes rekkefølgen blant I'ene og blant S'ene betyr heller ikke noe for hvordan det ferdige ordet ser ut.
- Det er $4! = 24$ måter å trykke de fire S'ene og $4! = 24$ måter å trykke de fire I'ene på.
- Det betyr at antall forskjellige ord vi kan skrive er

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650.$$

Oppgave.

Hvor mange forskjellige ord kan vi skrive ved å stokke om på bokstavene i ordet

PUSLESPILL

Regn ut svaret fullstendig.

Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles ordnet utvalg fra en mengde.

Eksempel.

Oppgave:

I et barneskirenn er det med 20 barn.

Det er lov til å opplyse om hvem som tok de tre første plassene, mens resten ikke skal rangeres.

Hvor mange forskjellige resultatlister kan man få?

Eksempel (Fortsatt).

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

- Legg merke til at

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{20!}{(20-3)!}$$

- Vi skal nå definere dette mer generelt og bruke notasjonen ${}^{20}P_3$ for dette tallet.

Definisjon.

- La r og n være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_{r}$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

Merk.

- ${}^{n}P_{r}$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke r elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med n elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$$ {}^{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! $$

- Det er som forventet, siden det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer i.

Eksempel.

- En idrettsleder har syv løpere i stallen sin, og skal velge ut fire av dem til å delta i en stafett.
- I et stafettlag spiller rekkefølgen stor rolle, især om idrettsgrenen er langrenn og det er to etapper i klassisk og to i fristil.
- Da er det ${}^{7}P_{4} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ forskjellige mulige laguttak.

Kombinasjoner

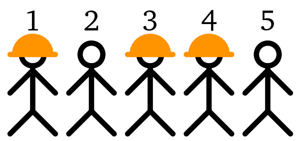
$$ \binom{n}{k} $$

angir hvor mange delmengder med k elementer det finnes av en mengde med n elementer

- Vi har tidligere vist dette ved induksjon.
- Det er også mulig å vise dette rent kombinatorisk, som vi skal gjøre snart.
- Slike tall kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.

[fragile]

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^{5}P_{3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli talt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.
- Hvis vi skal ta høyde for dette, så må vi dele på 6.
- Antall måter å fordele hattene er derfor $60/6 = 10$, som er $\binom{5}{3}$.

Teorem.

- La A være en mengde med n elementer, og la $0 \leqslant k \leqslant n$.
- Da finnes det

$$\binom{n}{k}$$

  forskjellige delmengder B av A.

Bevis (Nytt, og fritt for induksjon).

- Antall måter å velge k elementer *i rekkefølge* fra A på er

$$^{n}P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- For hver delmengde B med k elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra A som gir oss B.
- Da må antall mengder B med k elementer være

$$\frac{^{n}P_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
  - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.
  - Denne funksjonen vil være både surjektiv og injektiv.
- Derfor har vi at $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$.
- Antall delmengder av størrelse k må være lik antall delmengder av størrelse $n - k$.
- Det er like mange måter å velge n elementer på som det er å måter å *velge bort* n elementer på.

Binomialkoeffisientene

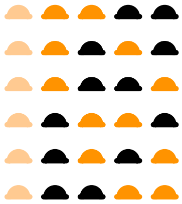
- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

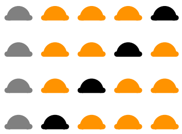
- Hvorfor er det slik? La oss se på et eksempel.
- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje.Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.



- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:
  - Ved hjelp av fakultetsfunksjonen og brøk:
  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$
  - Ved rekursjon:
  $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascals trekant

- Pascals trekant er en måte å skrive opp alle binomialkoeffisientene på ved hjelp av formelen
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
- Husk at
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
- Vi får følgende bilde.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
  - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,. . .
  - De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,. . .
  - Toerpotensene: 1,2,4,8,16,32,. . .
  - Kvadrattallene: 1,4,9,16,25,. . .
  - Fibonacci-tallene (selv om de er godt gjemt): 1,1,2,3,5,8,13,21,. . .
  - Og mange flere...

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a+b)^1 = a+b$.
- Mange vet at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- De fleste kan regne ut at $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Noen greier til og med å regne ut at $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Noen bør begynne å ane at det er en sammenheng med Pascals trekant.
- Siden $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ blir den anelsen bekreftet.

Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning).
For alle tall a og b og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \\
&\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}
$$

Bevis.

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$

- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi 2^n ledd.
- Hvert ledd består av n faktorer, hvor hver faktor er enten a eller b, f.eks. $abaa\cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1, \ldots, n\}$, så lar vi B svare til leddet hvor faktor nummer i er b hvis $i \in B$ og a ellers.
- F.eks. vil $\{1, 4, 5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a}\cdots\underset{n}{a}$
- Hvert ledd kommer fra en og bare en mengde B; det vi har beskrevet er en surjektiv og injektiv funksjon fra potensmengden av A til leddene vi får når vi regner ut $(a + b)^n$.

Bevis (Fortsatt).

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av A med k elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med k b'er og $n - k$ a'er.
- Disse leddene ordnes til
$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
- Dette er nøyaktig leddet med indeks k i teoremet.
- Siden k er vilkårlig må formelen i teoremet gi oss verdien på $(a + b)^n$.
- Dette avslutter beviset.

Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: n^r
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
  - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?
  - Det er $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$
- Vi skal se på noen flere eksempler.

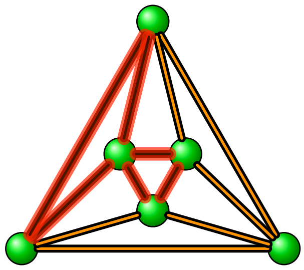
Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: 10^6 atomer.
- Atomer i en vanndråpe: 10^{21} atomer.
- Atomer i universet: 10^{80} atomer.
- Antall forfedre 265 generasjoner tilbake = antall atomer i universet.
- Og disse tallene er ganske små...
- Allikevel kan vi representere dem og regne på dem uten store problemer.

Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



- Oppgave: klarer dere å tegne denne på et ark uten å løfte blyanten og uten å gå over en kant to ganger?