MAT1030 – Forelesning 17

Rekurrenslikninger

Dag Normann - 16. mars 2010

(Sist oppdatert: 2010-03-16 14:18)

Forelesning 17

Rekurrenslikninger

- Forrige gang ga vi en rekke eksempler på bruk av induksjonsbevis og rekursivt definerte funksjoner.
- I et av eksemplene definerte vi binomialkoeffisientene og viste en viktig egenskap til binomialkoeffisienter ved induksjon.
- Både definisjonen og den viste egenskapen er pensum.
- $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!.}$$
- $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
- $\binom{n}{k}$ forteller oss på hvor mange forskjellige delmengder med k elementer det er av en mengde med n elementer.
- Det siste kvarteret snakket vi om rekurrens.
- Dette vil være hovedtemaet i dag.
- Vi skal først se på noen eksempler på rekurrenslikninger som tilnærming til en generell metode for å løse slike likninger.

Eksempel.

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen
$$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n)$$
- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$
- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = 3^n(5 \cdot 3 - 6) = 3^n \cdot 3^2 = 3^{n+2}$
- Det som gjør at denne utregningen fører frem er at 2 og 3 er løsninger av likningen
$$x^2 = 5x - 6$$
og det er de eneste løsningene.
- Det betyr at man må kunne løse 2. gradslikninger for å kunne løse slike rekurrenslikninger.

I stedet for å skrive at

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

skal gjelde for alle $n \in \mathbb{N}$
kan vi skrive at

$$F(n) - F(n-1) - 2F(n-2) = 0$$

for alle $n \geqslant 3$,
og i stedet for å skrive at

$$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$
kan vi skrive at

$$F(n) - 5F(n-1) + 6F(n-2) = 0$$

for alle $n \geqslant 3$.

Dette er strengt tatt uendelig mange likninger i uendelig mange variable $F(n)$, men det gir mening å snakke om løsningsmengden til dette likningsettet.

Vi vil nå etablere den terminologien vi skal bruke i fortsettelsen, og vise hvordan vi kan finne løsningsmengden til slike *rekurrenslikninger*.

Definisjon.

- En 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning er en *funksjonslikning* på formen

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0.$$

- En *følge* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ er en løsning av rekurrenslikningen hvis $aF(n)+bF(n-1)+cF(n-2) = 0$ for alle $n \geqslant 3$.
- Hvis verdiene for $t(1)$ og/eller $t(2)$ er angitt i tillegg, kalles dette initialbetingelser.
- En løsning må da tilfredstille disse betingelsene.

Eksempel.

- Fibonacci-følgen er bestemt som den eneste løsningen $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ av

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0$$

  med initialbetingelser $t(1) = t(2) = 1$
- Vi skal finne en formel for $F(n)$ når vi har utviklet metoden for det.

Merk.

- Vi kaller rekurrenslikningen lineær fordi likningens venstre side er en lineær kombinasjon av $t(n)$, $t(n-1)$ og $t(n-2)$.
  Eksempelvis vil ikke
  $$t(n) - (t(n-1))^2 - t(n-2) = 0$$
  være lineær fordi vi har et ledd av grad 2.

Merk (fortsatt).

- Vi kaller likningen homogen fordi vi ikke har noe ledd som bare avhenger av n.
  Eksempelvis er ikke
  $$t(n) - t(n-1) + 0 \cdot t(n-2) + n = 0$$
  homogen fordi vi har et ledd n.
- Likningen er 2. ordens fordi verdien av $t(n)$ avhenger av to verdier $t(n-1)$ og $t(n-2)$.
  Likningen $t(n) - 2t(n-1) = 0$ er 1. ordens, mens $t(n) - t(n-1) + t(n-2) - t(n-3) = 0$ er 3. ordens.

Merk (Fortsatt).

- Alt vi sier vil kunne gjøres gjeldende for 1. ordens og 3. ordens homogene, lineære likninger også, men vi skal konsentrere oss om de 2. ordens likningene.
- For enkelthets skyld vil vi bruke betegnelsen rekurrenslikning i betydningen 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning, ettersom vi vil begrense oss til denne typen rekurrenslikninger.

- Da vi analyserte mulige løsninger av likningen
  $$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n)$$
  kommenterte vi at vi utnyttet at 3 og 2 er løsninger i likningen
  $$x^2 = 5x - 6$$
  da vi viste at $F_1(n) = 3^n$ og $F_2(n) = 2^n$ er løsninger av rekurrenslikningen.
- Denne innsikten skal vi utvikle til en fullstendig innsikt i hvilke løsninger vi har:

Definisjon.
Hvis
$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0$$

er en rekurrenslikning, kalles

$$ax^2 + bx + c = 0$$

for den karakteristiske likningen til rekurrenslikningen.

Teorem.

La

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0$$

være en rekurrenslikning og la $r \in \mathbb{R}$.

Da er $F_r(n) = r^n$ en løsning av rekurrenslikningen hvis og bare hvis r er en løsning av den *karakteristiske* likningen.

Bevis.

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Vi setter F_r inn i likningene, og får

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = r^{n-2}(ar^2 + br + c) = 0,$$

det siste fordi r er løsning av den karakteristiske likningen.

Anta så at $F_r(n) = r^n$ løser rekurrenslikningen.

Setter vi inn for $n = 3$ får vi spesielt

$$ar^3 + br^2 + cr^1 = 0$$

som akkurat sier at $ar^2 + br + c = 0$ eller $r = 0$ Det siste er umulig hvis $c \neq 0$, noe som er tilfelle med en 2. ordens likning.

Dette resultatet forteller oss at vi ofte kan finne to løsninger av en rekurrenslikning.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen inneholder kvadratrot-tegn, vil de eksakte formlene for løsningene gjøre det samme.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen er komplekse tall, vil vi trenge komplekse tall for å beskrive løsningene av rekurrenslikningen.

Vi har imidlertid fortsatt bare to løsninger. Hvordan finner vi flere?

Setningen på neste side er et godt hjelpemiddel.

Teorem.

La

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0$$

være en rekurrenslikning ,

og la $F(n)$ og $G(n)$ være to løsninger.

La A og B være reelle tall.

Da er $H(n) = A \cdot F(n) + B \cdot G(n)$ også en løsning.

Bevis.

- Det er bare å sette H inn i rekurrenslikningen og sjekke:

$$\begin{gathered} a \cdot H(n) + b \cdot H(n-1) + c \cdot H(n-2) \\ = a(A \cdot F(n) + B \cdot G(n)) + b(A \cdot F(n-1) + B \cdot G(n-1)) \\ +c(A \cdot F(n-2) + B \cdot G(n-2)) \\ = A \cdot (a \cdot F(n) + b \cdot F(n-1) + c \cdot F(n-2)) \\ +B \cdot (a \cdot G(n) + b \cdot G(n-1) + c \cdot G(n-2)) \\ = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0. \end{gathered}$$

Eksempel.

- La oss gå tilbake til likningen for Fibonacci-tallene:

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - x - 1 = 0$$

og ved abc-formelen har vi løsninger

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Eksempel (Fortsatt).

Det betyr at vi bør lete etter en løsning på formen

$$F(n) = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Eksempel (Fortsatt).

Vi vet at hvis vi finner A og B slik at initialbetingelsene $F(1) = F(2) = 1$ holder, så må vi ha funnet den eneste løsningen som fins.

Det gir oss to *stygge* lineære likninger i de ukjente A og B

$$A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

Den som vil løse disse likningene selv, bør lukke øynene på neste side, hvor vi gir løsningene uten mellomregning.

Eksempel (Fortsatt).

Løsningene er

$$A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

og

$$B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

så formelen for n'te Fibonaccitall $F(n)$ er, utrolig nok,

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

For hver verdi av n er altså dette et naturlig tall.

- Hvis den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger r og s, vil alle løsningene av rekurrenslikningen være på formen

$$F(n) = A \cdot r^n + B \cdot s^n.$$

- Det er fordi hvis vi i tillegg bestemmer verdiene på $F(1)$ og $F(2)$, vil vi kunne løse likningsettet

$$A \cdot r + B \cdot s = F(1)$$
$$A \cdot r^2 + B \cdot s^2 = F(2).$$

- Dermed finner vi en løsning på formen $F(n) = Ar^n + Bs^n$ som oppfyller initialbetingelsene.
- Vi skal regne gjennom et typisk eksempel.

Eksempel.

- Anta at vi skal løse følgende oppgave:
  a) Finn alle løsningene av rekurrenslikningen

  $$t(n) - 2t(n-1) - 3t(n-2) = 0.$$

  b) Finn løsningen fra a) som tilfredstiller initialbetingelsene $F(1) = 1$ og $F(2) = 2$.
- Det første vi må gjøre er å finne den karakteristiske likningen

  $$x^2 - 2x - 3 = 0$$

  og løse den:

Eksempel (Fortsatt).

- $$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$
- Siden den karakteristiske likningen har to løsninger, vet vi at den generelle løsningen av rekurrenslikningen er $F(n) = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$.
- Dette løser a).

Eksempel (Fortsatt).

- For å løse b), må vi bestemme A og B slik at initialbetingelsene holder.
- Det betyr at vi må løse likningene
  - $3A - B = 1$ ($n = 1$, $F(1) = 1$ var en betingelse.)
  - $9A + B = 2$ ($n = 2$, $F(2) = 2$ var en betingelse.)

Eksempel (fortsatt).

- Legger vi sammen likningene, får vi $12A = 3$, så $A = \frac{1}{4}$ er en løsning.
- Setter vi denne løsningen inn i en av likningene og løser med hensyn på B, får vi $B = -\frac{1}{4}$.

- Løsningen på oppgave b) er derfor

$$F(n) = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n).$$

Merk.

- Det er ikke anledning til å ha med seg hjelpemidler til eksamen i MAT1030.
- Spesielt er det ikke anledning til å ha med lommeregner.
- Det betyr at de som har basert seg på å bruke lommeregner for å løse annengradslikninger må begynne å øve seg på å løse dem for hånd.

- I det forrige eksemplet så vi hvordan vi kan løse enhver rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger.
- Hva gjør vi hvis det bare fins en løsning?
- Fortsatt vil det være slik at hvis vi kan finne to "uavhengige" følger som løsninger, vil alle andre løsninger være kombinasjoner av disse.
- Hvis r er løsningen på den karakteristiske likningen, er fortsatt $F(n) = r^n$ en løsning av rekurrenslikningen.
- Målet vårt må derfor være å finne en annen løsning i tillegg.

Eksempel.

- Betrakt rekurrenslikningen

$$t(n) - 4t(n-1) + 4t(n-2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

- $r = 2$ er den eneste løsningen av den karakteristiske likningen.
- Da er $F(n) = 2^n$ en løsning av rekurrenslikningen.
- La oss gi to initialbetingelser for å se om det fins noe mønster som antyder hvordan en annen løsning kan se ut:

Eksempel (Fortsatt).

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

  Regning gir oss at

  $G(3) = -4$, $G(4) = -16$, $G(5) = -48$ og $G(6) = -128$

Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

$G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1$, $G(2) = 0 \cdot 2^2$, $G(3) = -2^{-1} \cdot 2^3$, $G(4) = -2 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4$, $G(5) = -3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^5$ og $G(6) = -4 \cdot 2^{-1} \cdot 2^6$.

Det vil være naturlig å gjette på at $G(n) = (2-n) \cdot 2^{-1} \cdot 2^n$ er løsningen av rekurrenslikningen.

Vi skal se at det er tilfelle.

Eksempel (Fortsatt).

- Hvis vi har gjettet riktig, vil $H(n) = n \cdot 2^n$ også være en løsning av rekurrenslikningen, siden H kan skrives som en kombinasjon av vårt forslag til $G(n)$ og av $F(n)$
- Omvendt, hvis $H(n)$ er en løsning av rekurrenslikningen, er $G(n)$ en kombinasjon av $F(n)$ og $H(n)$, så da er $G(n)$ en løsning av rekurrenslikningen (og den som oppfyller initialbetingelsene).
- I så fall er svaret så pent at det er verd et forsøk med et generelt bevis.

Teorem.

La

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0$$

være en rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen bare har en løsning r.

Da er $H(n) = nr^n$ en løsning av rekurrenslikningen.

Bevis.

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siden det bare er en løsning er $b^2 = 4ac$, fordi det som står under rottegnet må være null.

Vi setter $H(n)$ inn i likningen, og får

1. $anr^n + b(n-1)r^{n-1} + c(n-2)r^{n-2}$
2. $= r^{n-2}(anr^2 + bnr - br + cn - 2c)$
3. $= r^{n-2}(n(ar^2 + br + c) - br - 2c)$
4. $= -r^{n-2}(br + 2c)$.

Bevis (Forklaring).

- I linje 1 setter vi $H(n)$ inn i likningen.
- I linje 2 setter vi den felles faktoren r^{n-2} utenfor samtidig som vi løser opp parentesene $(n-1)$ og $(n-2)$.
- I linje 3 setter vi n utenfor de leddene hvor n er faktor.
- I linje 4 utnytter vi at r er en løsning av den karakteristiske likningen, så $ar^2 + br + c = 0$.
- For å vise at $H(n)$ er en løsning av rekurrenslikningen, er det altså nok å vise at $br + 2c = 0$
- Her skal vi bruke at r er den eneste løsningen.

Bevis (Fortsatt).

- Siden vi har en 2. ordens likning, vil $a \neq 0$ og $c \neq 0$.
- Siden vi bare har en løsning, er
$$r = \frac{-b}{2a}.$$
- Setter vi dette inn i $br + 2c$ får vi
$$b \cdot \frac{-b}{2a} + 2c.$$

Bevis (Fortsatt).

- Satt på felles brøkstrek er dette
$$\frac{-b^2 + 4ac}{2a}$$
som er lik 0 fordi $b^2 - 4ac = 0$.
- Det var det som gjensto å bevise, så teoremet er vist.

Merk.

Vi har nå funnet to løsninger av rekurrenslikningen både i det tilfellet hvor den karakteristiske likningen har to løsninger, og i det tilfellet hvor den bare har en løsning.

Siden vi kan finne en lineær kombinasjon av slike løsninger for enhver initialbetingelse $t(1) = a$ og $t(2) = b$, har vi i realiteten funnet en generell løsning.

Hvis r og s er to forskjellige løsninger av den karakteristiske likningen, er

$$F(n) = Ar^n + Bs^n$$

den generelle løsningen av rekurrenslikningen.

Merk (Fortsatt).

Hvis r er den eneste løsningen av den karakteristiske likningen er

$$F(n) = (A + Bn)r^n$$

den generelle løsningen av rekurrenslikningen.

Eksempel.

- Anta at vi har fått følgende oppgave:
- La $t(n) - t(n-1) + \frac{1}{4}t(n-2) = 0$ være en rekurrenslikning.

a) Finn den generelle løsningen $F(n)$ til likningen.

b) Finn løsningen $G(n)$ som oppfyller at $G(1) = G(2) = 1$.

c) Finn løsningen $H(n)$ som oppfyller at $H(1) = 1$ og $H(2) = 0$.

Eksempel (Fortsatt).

Først må vi finne den karakteristiske likningen
$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.
Vi finner at $r = \frac{1}{2}$ er den eneste løsningen.
Da er den generelle løsningen

$$F(n) = (A + nB)(\frac{1}{2})^n.$$

Dette løser $a)$

Eksempel (Fortsatt).

For å løse punkt b), bruker vi de to initialbetingelsene til å finne to likninger med A og B som ukjente

- $n = 1$: $(A + B)\frac{1}{2} = 1$, det vil si $A + B = 2$.
- $n = 2$: $(A + 2B)(\frac{1}{2})^2 = 1$, det vil si $A + 2B = 4$.

Disse har løsninger $A = 0$ og $B = 2$, så svaret på b) er

$$G(n) = 2n(\frac{1}{2})^n.$$

Eksempel (Fortsatt).

For å løse c) setter vi 1 og 0 i høyresidene i likningene over, og får

- $A + B = 2$
- $A + 2B = 4$

som har $A = 4$ og $B = -2$ som løsninger.

Løsningen på c) er derfor

$$H(n) = (4 - 2n)(\frac{1}{2})^n.$$

Spiller så rekurrenslikninger noen rolle i informatikken?

Hvis man skal analysere kompleksiteten av en algoritme, det vil si finne ut av hvor mange regneskritt som trenges som funksjon av størrelsen på input, risikerer man at resultatet blir en inhomogen rekurrenslikning. (Dette er observert på vitenskapelig foredrag om temaet).

Da vil regnetiden vokse eksponensielt med størrelsen på input.

Hvis grunntallet i denne eksponenten ikke er så mye større enn 1, er ikke det nødvendigvis ødeleggende for nytten av algoritmen.

Det er stor forskjell på en algoritme hvor regnetiden er begrenset av $1000(1,08)^n$ og en der regnetiden er begrenset av $2(1,23)^n$, hvor n er antall bit i input. n trenger ikke å være så veldig stor før den første trolig er mer effektiv enn den andre.