MAT1030 – Forelesning 23

Grafteori

Dag Normann - 20. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-20 14:20)

Grafteori

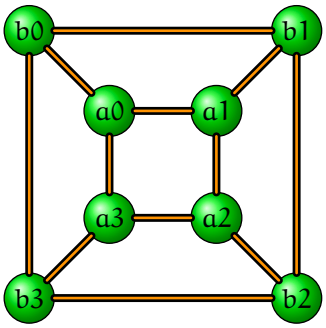
Repetisjon og mer motivasjon

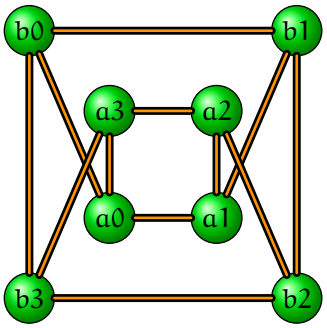
- Først litt repetisjon
- En graf består av *noder* og *kanter*
- Kanter ligger *inntil* noder, og noder kan være *naboer*.
- Vi bør kjenne til begrepene om *sammenhengende* grafer, *tomme* grafer, *løkker*, *parallelle* kanter, *enkle* grafer og *komplette* grafer.
- Hver node har en *grad*.
  - Summen av gradene til alle nodene i en graf er lik 2 ganger antallet kanter.
  - Håndhilselemmaet: Det er alltid et partall antall noder av odde grad i en graf.
- Vi skal kjenne til *komplementet* av en graf og *matriserepresentasjoner*.
- Grafer kan brukes til å representere omtrent alt som fins av relasjoner.
- Mange algoritmer/egenskaper kan forstås bedre ved å bruke grafer.
- Ofte er løsningen å kunne identifisere et problem som et *grafteoretisk* problem.

Grafisomorfier

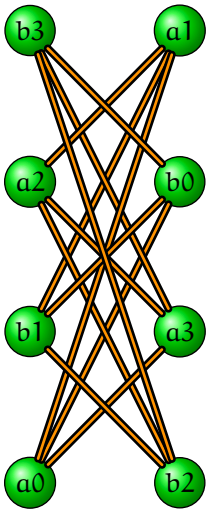
- Vi skal nå møte begrepet *isomorfi* for første gang i dette kurset.
- Isomorfibegrepet er veldig generelt og brukes overalt i matematikk.
- Ordet kommer fra gresk og betyr formlik (iso = lik, morf = form).
- Isomorfe objekter skal ha samme *form*, men kan ha ulikt innhold.
- En isomorfi er en funksjon som er injektiv og surjektiv – det er altså en en-til-en-korrespondanse – og som bevarer bestemte egenskaper.
- Intuitivt, så sier vi at to matematiske objekter er *isomorfe* hvis de er "strukturelt like".
- Hvis vi har tegnet opp to grafer og kan komme fra den ene grafen til den andre ved kun å flytte på noder og endre på lengdene på kantene, så er grafene *isomorfe*.
- Vi har ikke lov til å legge til eller ta bort noder eller kanter, eller dele kanter eller noder i to...

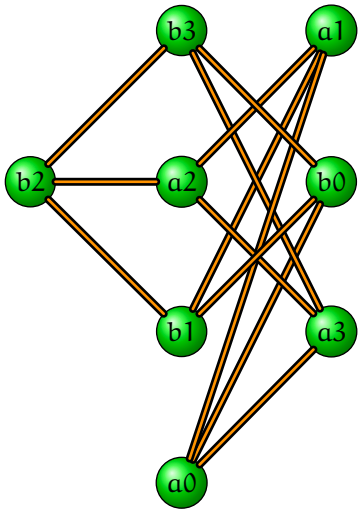
- Følgende to grafer er isomorfe.

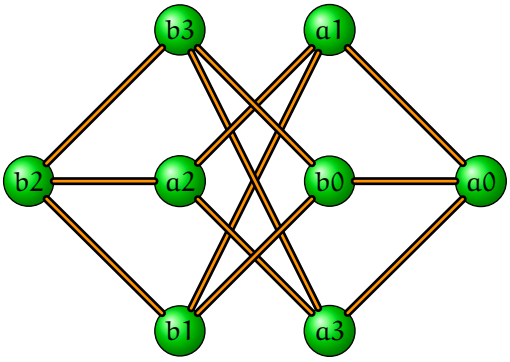


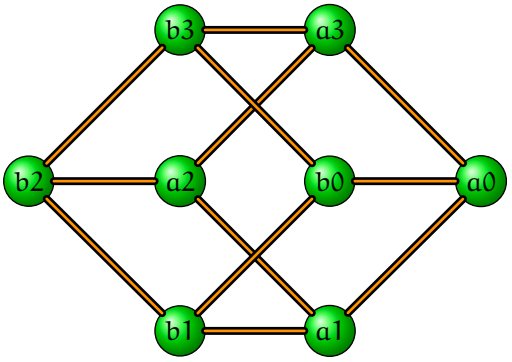


- Disse to grafene er også isomorfe med følgende grafer.

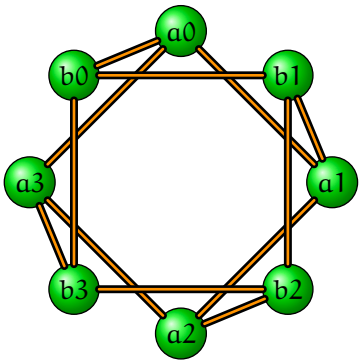


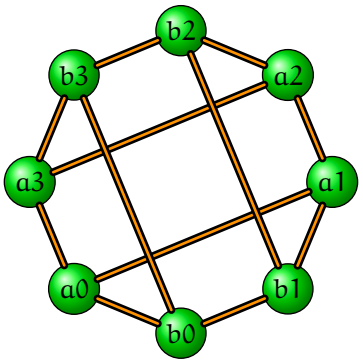






- De neste par grafene er også er isomorfe med disse.





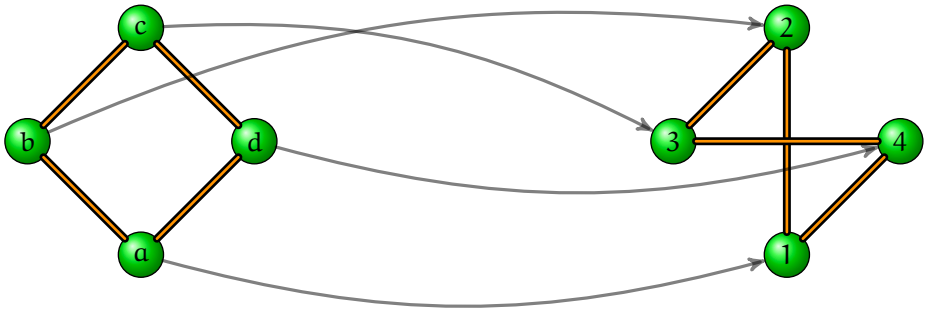
- Vi skal nå gjøre isomorfibegrepet helt presist.
- Hvis G og H er to grafer, så er en isomorfi mellom grafene en funksjon fra nodene i G til nodene i H som oppfyller bestemte egenskaper.

Definisjon (Isomorfi).
La G og H være to enkle grafer slik at $V(G)$ er mengden av noder i G og $V(H)$ er mengden av noder i H. En *isomorfi* fra G til H er en funksjon $f : V(G) \to V(H)$ med følgende egenskaper:

- f er surjektiv og injektiv
- Nodene u og v er naboer i G *hvis og bare hvis* nodene $f(u)$ og $f(v)$ er naboer i H.

Eksempel.

- La grafen G bestå av nodene $\{a, b, c, d\}$ og kantene $\{ab, bc, cd, da\}$.
- La grafen H bestå av nodene $\{1, 2, 3, 4\}$ og kantene $\{14, 34, 12, 32\}$.
- Funksjonen f slik at $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ og $f(d) = 4$ er en isomorfi.
- F.eks. ser vi at a og b er naboer i G (siden ab er en kant).
- Da må $f(a)$ og $f(b)$, som er 1 og 2, være naboer i H.
- Det stemmer, siden 12 er en kant i H.



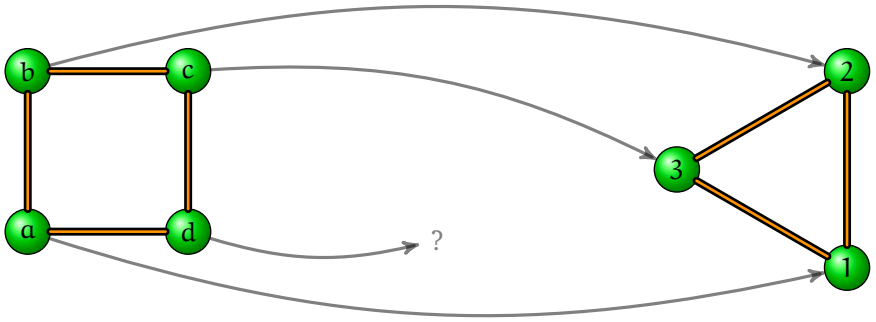
Merk.

- Det står "*hvis og bare hvis*" i definisjonen:
- Nodene u og v er naboer i G *hvis og bare hvis* nodene $f(u)$ og $f(v)$ er naboer i H.
- *Hvis*-delen av definisjonen er denne påstanden:
  - Nodene u og v er naboer i G *hvis* nodene $f(u)$ og $f(v)$ er naboer i H.
  - Det betyr at hvis nodene u og v *ikke* er naboer, så er heller ikke nodene $f(u)$ og $f(v)$ naboer.
  - "Naboer i $H \rightarrow$ Naboer i G"
- *Bare hvis*-delen av definisjonen er denne påstanden:
  - Nodene u og v er naboer *bare hvis* nodene $f(u)$ og $f(v)$ naboer.
  - Det betyr at hvis nodene u og v er naboer, så er også nodene $f(u)$ og $f(v)$ naboer.
  - "Naboer i $G \rightarrow$ Naboer i H"

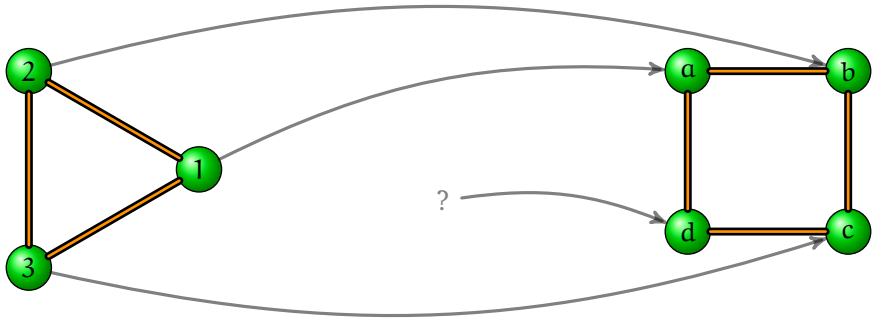
- Vi har definert isomorfi mellom enkle grafer.
- Vi kan utvide definisjonen til å gjelde endelige grafer generelt.
- Da krever vi at antall kanter mellom u og v i G skal være det samme som antall kanter mellom $f(u)$ og $f(v)$ i H.
- For enkle grafer kan dette antallet være 0 (om u og v ikke er naboer) og 1 (om u og v er naboer).
- For å vise at to grafer er isomorfe, må man gi en funksjon og argumentere for at funksjonen har egenskapene som er nødvendige.
- Det fins per i dag ingen effektiv algoritme for å avgjøre om to grafer er isomorfe.
- For å vise at to grafer *ikke* er isomorfe, så er det tilstrekkelig å finne en "grafteoretisk egenskap" som kun den ene av grafene har.
- En grafteoretisk egenskap er en egenskap som bevares under "lovlige" tranformasjoner, som å flytte rundt på nodene, gjøre kantene lengre/kortere, etc.
- Noen av de enkleste grafteoretiske egenskapene er f.eks.:
  - Hvor mange noder en graf har.
  - Hvor mange kanter en graf har.

– Hvor mange noder av en bestemt grad en graf har.
– Korteste avstand mellom to noder.

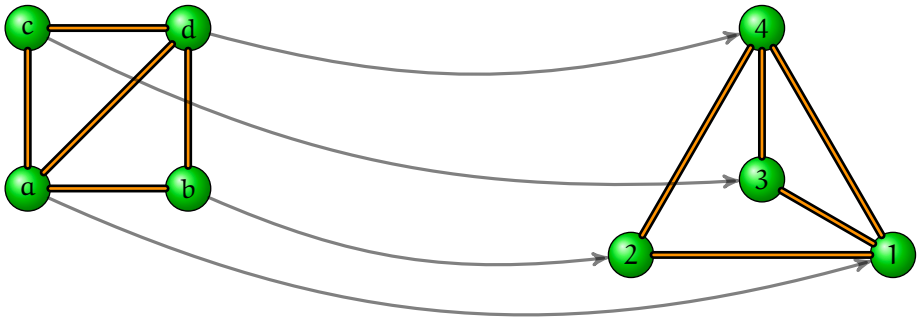
- Er følgende grafer isomorfe?



- Nei, de er ikke isomorfe.
- Grafen til høyre har *færre* noder enn grafen til venstre, så ingen funksjon fra den venstre grafen til den høyre kan være *injektiv* eller *en-til-en*.
- Er følgende grafer isomorfe?

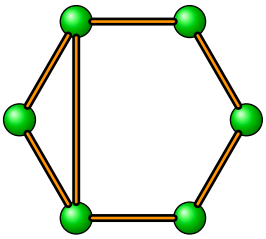


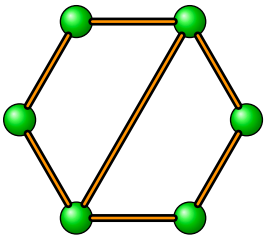
- Nei, de er ikke isomorfe.
- Grafen til høyre har *flere* noder enn grafen til venstre, så ingen funksjon fra den venstre grafen til den høyre kan være *surjektiv* eller *på*.
- Er følgende grafer, G og H, isomorfe?



- Ja, de er isomorfe.
- Funksjonen $f : V(G) \to V(H)$ gitt ved $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ og $f(d) = 4$ er en isomorfi.
- Vi ser at u og v er naboer i G hvis og bare hvis $f(u)$ og $f(v)$ er naboer i H.

- Er følgende grafer isomorfe?





- Nei, de er ikke isomorfe.
- Grafen til venstre inneholder tre noder som alle er relatert til hverandre; det gjør ikke grafen til høyre.

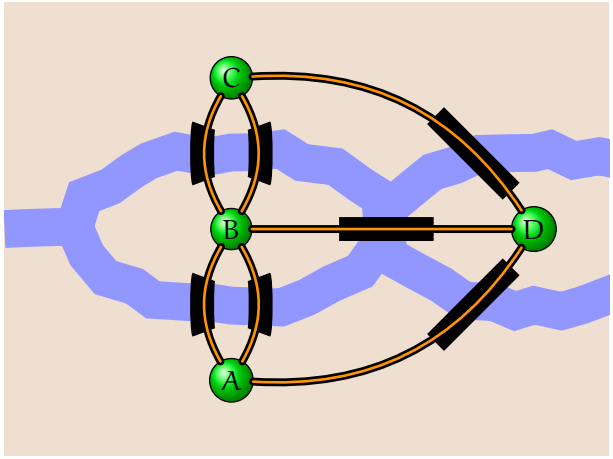
Noen kommentarer

- Å avgjøre om to grafer er isomorfe er i bunn og grunn å finne ut om det er den samme grafen man har å gjøre med.
- Hvis en rekke grafer er gitt, så ønsker vi å finne ut om noen av dem er isomorfe for å unngå å gjøre overflødig arbeid.
- Det er ingen som har klart å lage en *effektiv* algoritme (polynomiell tid) for å avgjøre om grafer er isomorfe (i det generelle tilfellet).
- Mange spesialtilfeller, f.eks. trær, vet man mye om.
- I praksis så klarer man å lage ganske effektive algoritmer allikevel, men i *verste* tilfelle må man backtracke over alle $n!$ mulige omdøpinger av nodene.
- Å finne isomorfier fra en graf til seg selv er en måte å avdekke *symmetrier* på.
- Å finne ut om en graf er en *delgraf* av en annen er et annet, men relatert, problem. (Ofte vanskeligere.)

Stier og kretser

- Vårt neste tema er *stier* (engelsk: *path*) og *kretser* (engelsk: *circuit*).
- Vi skal begynne med det klassiske eksemplet om *Königsbergs broer*.
- Kort fortalt har vi sju broer som forbinder fire landområder.
- Spørsmålet er om det går an å gå en tur i Königsberg slik at man går over hver av de sju broene *nøyaktig* én gang.
- Dette er kjent for å ha blitt løst av Leonhard Euler omkring 1735.
- Vi skal se at oppgaven er den samme som å finne en *Eulersti* i grafen som representer Königsberg.

Königsbergs broer



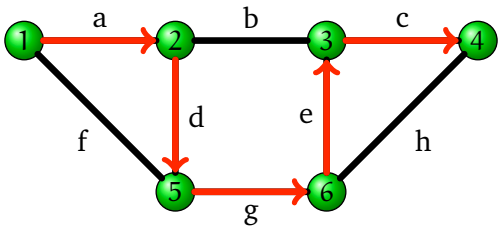
Vi representerer situasjonen med en graf. Spørsmålet blir nå om det er mulig å gå over alle kantene nøyaktig en gang.

Definisjon (Sti).
En *sti* av lengde n i en graf er sekvens av noder og kanter på formen

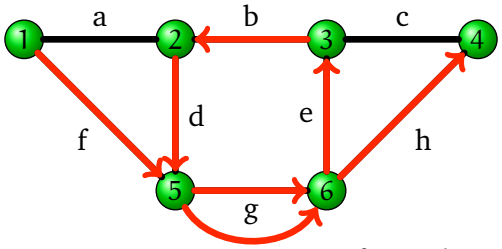
$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_n v_n$$

hvor e_i er en kant som forbinder v_{i-1} og v_i for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. En sti hvor $v_0 = v_n$ kalles en *krets*. Vi sier at sekvensen er en sti fra v_0 til v_n.

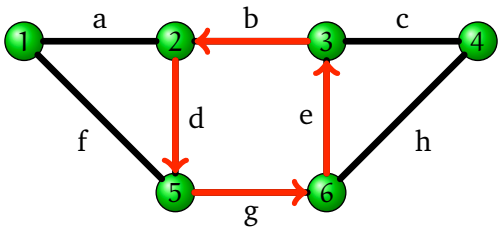
- En sti kalles også for en *vei*.
- *Lengden* til en sti er det samme som antall kanter i stien.
- En enkelt node er både en sti og en krets av lengde 0.
- Hvis grafen er *enkel*, tillater vi oss å skrive $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$ for stien.
- Vær oppmerksom på at terminologien for grafteori varierer fra lærebok til lærebok.
- Vi ser på noen eksempler.



1a2d5g6e3c4 er en sti fra 1 til 4.

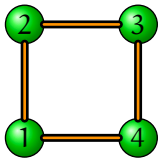


1f5g6e3b2d5g6h4 er en sti fra 1 til 4.



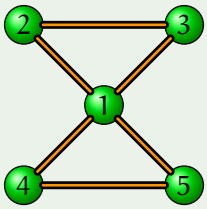
5g6e3b2d5 er en krets som begynner og slutter i 5.

- Hvis en graf er enkel fins det ingen parallelle kanter, og da kan vi betegne en sti som en sekvens av noder.
- Det er vanlig å identifisere kretser som kun er forskjellige med hensyn på startnode eller rekkefølge.



- Her er 12341 en krets.
- Vi identifiserer denne med kretsene 23412, 34123, etc., og 43214, 32143, etc.

Oppgave.
Hvor mange *forskjellige* kretser som inneholder alle kantene nøyaktig én gang fins i følgende graf?



- Vi kan definere mengder av stier *induktivt* på følgende måte.

Definisjon (Mengden av stier - induktivt).
- En sekvens som består av en node v er en sti.

- Hvis p er en sti, og det siste elementet i p er noden u, og det går en kant fra u til v, så er sekvensen pev en sti.
- Mengden av stier er den minste mengden som oppfyller disse to kravene.

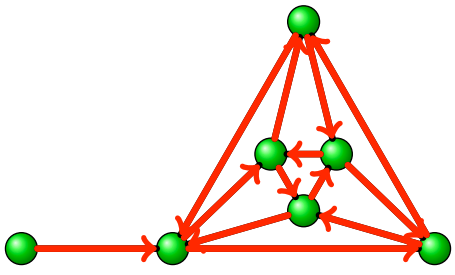
- Når vi nå har begrepet om en sti kan vi definere *sammenhengende grafer* mer presist.

Definisjon (Sammenghengende).
En graf er *sammenhengende* hvis det for hvert par av noder u og v fins en sti fra u til v.

- Vi kan definere en ekvivalensrelasjon R på mengden av noder i en graf ved å si at uRv skal holde hvis det fins en sti fra u til v.
- Det er lett å sjekke at R er transitiv, refleksiv og symmetrisk.
  (Vi tegner og forklarer på tavla.)
- Ekvivalensklassene definert av R kalles for *komponentene* til grafen.
- En graf kan deles opp i "sammenhengende delgrafer" på en slik måte.
- En sammenhengende graf er en graf som består av en komponent.

Definisjon (Eulersti/Eulerkrets).
La G være en sammenhengende graf. En *Eulersti* er en sti som inneholder hver kant fra G nøyaktig én gang. En *Eulerkrets* er en Eulersti hvor den første og den siste noden sammenfaller. En sammenhengende graf som har en Eulerkrets kalles *Eulersk*. En sammenhengende graf som har en Eulersti, men *ikke* en Eulerkrets, kalles *semi-Eulersk*.

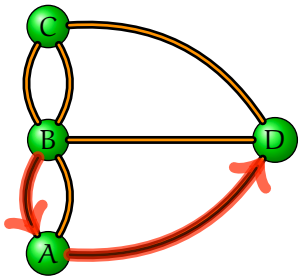
- Noen kommentarer er på sin plass.
- I en Eulersti har vi lov til å gjenta noder, men ikke kanter.
- Eulerstier kalles også for *Eulerveier*.
- Finner vi en Eulersti i denne grafen?
- Vi må i hvert fall begynne eller slutte i noden helt til venstre, siden den har grad 1.



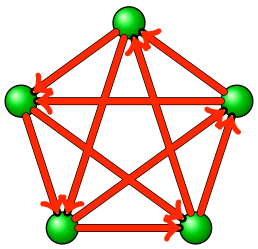
- Vi fant en Eulersti.
- En Eulerkrets er riktignok umulig, på grunn av noden til venstre.
- Ved å ta bort denne, så får vi en Eulerkrets.

Tilbake til Königsberg

- Problemet om Königsbergs broer blir nå: Har grafen over Königsberg en Eulersti?
- En sti må gå innom noden A minst en gang.
- Hvis vi går inn i A og ut igjen, så gjenstår én kant.
- For å gå over alle tre kantene som ligger inntil A, så må man enten begynne eller slutte i A.
- Det samme gjelder for C, og D og B, siden de alle har *odde grad*.



- Vi ser om vi finner en Eulerkrets i den komplette grafen med fem noder.

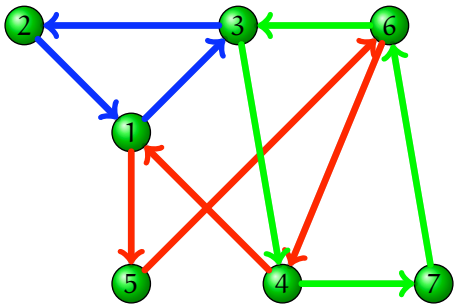


- Det var greit.
- Vi observerer at hver node har grad 4, et partall.
- Vi skal nå se at det er en sammenheng mellom eksistensen av Eulerstier/-kretser og hvorvidt gradene til nodene er partall.
- Anta at vi har en graf med en Eulerkrets.
- Hva er da gradene til nodene i grafen?
- Vi kan skrive Eulerkretsen som sekvensen $v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_nv_n$, hvor $v_n = v_0$.
- Graden til en node u må være 2 ganger antall ganger den forekommer i sekvensen.
- Enhver node i grafen må da ha grad lik et partall.
- Vårt neste teorem sier det omvendte, nemlig at hvis hver node i en graf har grad som er et partall, så må grafen inneholde en Eulerkrets.

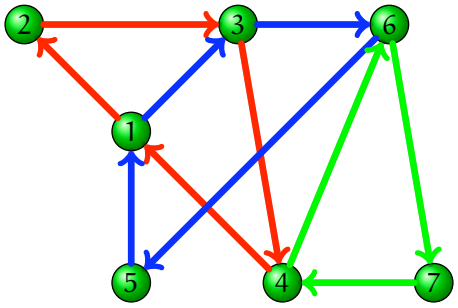
Teorem.
La G være en sammenhengende graf.

1. Hvis graden til enhver node i G er et partall, så inneholder G en Eulerkrets.
2. Hvis nøyaktig to noder i G har *odde* grad, så inneholder G en Eulersti som begynner i en node av odde grad og som slutter i en node av odde grad.
3. Hvis G har mer enn to noder av odde grad, så inneholder grafen *ikke* en Eulersti.

- Boka beviser påstand 1 ved å gi en algoritme for å konstruere en Eulerkrets for en graf hvor hver node har et partall som grad.
- Vi må da argumentere for at algoritmen er *korrekt*, at den alltid vil finne en Eulerkrets.
- I dette tilfellet er det ganske greit å se.
- Vi skal se at påstand 1 medfører påstand 2, at en graf som inneholder nøyaktig to noder av odde grad inneholder en Eulersti.
- La oss se på intuisjonen bak algoritmen.



- Hvis vi begynner i node 2, så finner vi kretsen 2132.
- Siden ubrukte kanter ligger inntil både node 1 og 3, forsøker vi å *utvide* vår nåværende krets ved å legge til nye kretser.
- Hvis vi begynner i node 1, så finner vi kretsen 15641.
- Vi kan *sette sammen* disse kretsene og få kretsen 21564132.
- Vi finner en krets til, 47634.
- Vi får da kretsen 215647634132 som er en Eulerkrets.
- Her er en annen måte å sette sammen flere kretser til en Eulerkrets på, med den samme grafen.

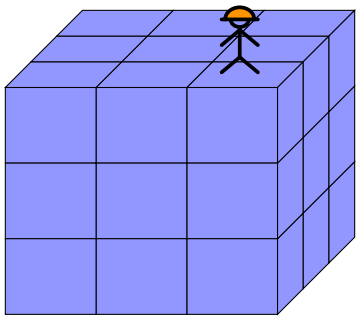


- Hvis vi begynner med en sti som kun inneholder én node og utvider stien stegvis ved å legge til kanter og stier, så må vi før eller siden komme tilbake til den første noden i stien, slik at vi får en *krets*.
- Grunnen er at hver node har grad som er et partall.
- Hver gang vi "går inn i" en node i stien, som ikke er startnoden, så må finnes en ubrukt kant slik at vi kan "gå ut" igjen.
- Før eller siden må vi komme tilbake til startnoden.

1. Input en Eulergraf G med noder V og kanter E
2. krets $\leftarrow$ en node fra V

3. **While** $E \neq \emptyset$ **do**
   3.1. $i \leftarrow$ den første noden i krets med en kant fra E som ligger inntil i
   3.2. $v \leftarrow i$; $nykrets \leftarrow i$
   3.3. **Repeat**
      3.3.1. $e \leftarrow$ en kant fra E som ligger inntil v
      3.3.2. $v \leftarrow$ noden som er nabo med v via e
      3.3.3. $nykrets \leftarrow$ sammensetningen av $nykrets$ og e og v
      3.3.4. $E \leftarrow E - \{e\}$
      until ingen kant fra E ligger inntil v
   3.4. $krets \leftarrow$ sammensetningen av $krets$ før i, $nykrets$ og $krets$ etter i
4. Output $krets$

En nøtt om en maur og en kube



- Anta at en maur sitter på utsiden av en 3x3x3-kube.
- Mauren spiser seg inn i den første lille kuben (av i 27 kuber).
- Er det mulig for mauren å spise seg gjennom alle kubene og så komme ut igjen samme sted?
- Mauren har kun lov til å gå en kube av gangen og ikke på skrå.