MAT1030 – Forelesning 12

Relasjoner

Dag Normann - 24. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-24 12:36)

Kapittel 5: Relasjoner

Repetisjon

- En relasjon på en mengde A er en delmengde $R \subseteq A \times A = A^2$.
- Vi har satt navn på visse egenskaper relasjoner som oppstår i anvendelser ofte kan ha.

Definisjon.

- En relasjon R på en mengde A kalles:
  - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.
  - Irrefleksiv hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx.
  - Symmetrisk hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
  - Antisymmetrisk hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
  - Transitiv hvis $xRy \wedge yRz$ medfører xRz for alle $x, y, z \in A$.

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er ekvivalensrelasjonene. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel.

a) La $A = \{0, \ldots, 9\}$.

   Hvis a og b er elementer i A lar vi aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.

   Vi ser at R deler A opp i tre disjunkte mengder $B = \{0, 3, 6, 9\}$, $C = \{1, 4, 7\}$ og $D = \{2, 5, 8\}$, hvor hver mengde består av tall som står i innbyrdes relasjon til hverandre, mens vi ikke har noen R-forbindelser på mengdene imellom.

Eksempel (Fortsatt).

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Vi ser at to punkter står i R-relasjon til hverandre nøyaktig når avstanden til origo er den samme.

Denne relasjonen deler $\mathbb{R}^2$ opp i uendelig mange disjunkte mengder, nemlig sirklene om origo med radius r for $r \geqslant 0$.

Eksempel (Fortsatt).

c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*.

Heltallsverdien til et tall p er det største hele tallet $a \leqslant p$.

I alle disse eksemplene har vi definert en relasjon R ved at to objekter står i relasjon til hverandre når de deler en viss felles egenskap.

Det er denne typen relasjoner vi vil kalle *ekvivalensrelasjoner*.

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

  Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.
- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.
- Hvis a og b deler en egenskap, og b og c deler den samme egenskapen, er den også felles for a og c.

  Vi vil kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *transitiv*.
- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuisjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”.

  Den formelle definisjonen er:

Definisjon.

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en ekvivalensrelasjon om R er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

- En viktig egenskap ved en ekvivalensrelasjon R på en mengde A er at R deler A opp i disjunkte mengder av parvis ekvivalente elementer i A.

  (Disjunkt betyr at snittet er tomt.)
- Disse mengdene kaller vi ekvivalensklasser.

- Vi skal vise denne egenskaper ved ekvivalensrelasjoner helt generelt, men la oss se på noen eksempler først.

Eksempel.

- La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- La $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4),$
  $(3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$
- I utgangspunktet er det ikke så lett å se hvilke egenskaper R har, men beskriver vi R på matriseform blir bildet klarere:

Eksempel (Fortsatt).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Vi ser at aRb hvis og bare hvis a og b tilhører den samme av delmengdene $\{0, 1\}$, $\{2\}$ og $\{3, 4, 5\}$.

Eksempel.

- Vi definerer relasjonen R på $\mathbb{R}^2$ ved $(x, y)R(u, v)$ om $x + y = u + v$.
- R er en ekvivalensrelasjon.
- Hvis $x + y = k$ vil $(x, y)R(u, v)$ hvis og bare hvis $u + v = k$.
- Denne relasjonen deler planet opp i uendelig mange disjunkte deler, hvor delene er alle linjene med stigningstall -1

Definisjon.

La R være en ekvivalensrelasjon på en mengde A og la $a \in A$.

Vi lar ekvivalensklassen til a være

$$E(a) = \{b \in A \mid aRb\}.$$

Teorem.

La R være en ekvivalensrelasjon på mengden A, $E(a)$ ekvivalensklassen til $a \in A$.

a) For alle $a \in A$ vil $a \in E(a)$.

b) Hvis aRb vil $E(a) = E(b)$.

c) Hvis $\neg(aRb)$ vil $E(a) \cap E(b) = \emptyset$

Dette teoremet sier nettopp at hvis R er en ekvivalensrelasjon på A, så vil vi dele A opp i disjunkte klasser av parvis ekvivalente elementer.

Bevis.

Siden aRa vil $a \in E(a)$. Dette viser a).

La aRb. Skal vise at $E(a) = E(b)$.

Siden vi da også har at bRa er det nok å vise at $E(b) \subseteq E(a)$ for å vise b).

Så la $c \in E(b)$.

Da vil $aRb \wedge bRc$ så aRc fordi R er transitiv.

Det betyr at $c \in E(a)$.

Siden $c \in E(b)$ var valgt vilkårlig, kan vi slutte at $E(b) \subseteq E(a)$.

Bevis (Fortsatt).

Til sist, anta at $c \in E(a) \cap E(b)$.

Da vil $aRc \wedge bRc$.

Ved symmetri og transitivitet for R følger det at aRb.

Snur vi dette argumentet på hodet, får vi at $\neg(aRb) \Rightarrow E(a) \cap E(b) = \emptyset$.

Dette viser c), og teoremet er bevist.

Oppgave.

La A være en mengde og la R og S være ekvivalensrelasjoner på A.

La $T = S \cap R$

a) Forklar hvorfor vi har at aTb hvis og bare hvis $aRb \wedge aSb$ for alle a og b i A.

b) Vis at T er en ekvivalensrelasjon.

c) Finn et eksempel hvor $R \cup S$ ikke er en ekvivalensrelasjon.

Ordninger

- En annen type relasjoner som forekommer ofte er ordninger.
- Vi har en ordning når vi formaliserer "mindre eller lik" , "er svakere enn" og tilsvarende forhold.
- Vi tar definisjonen først, og illustrerer den med noen eksempler etterpå.
- Vi følger boka og definerer:

Definisjon.

La A være en mengde med en relasjon R.

Vi kaller R en partiell ordning hvis

1. R er refleksiv
2. R er transitiv
3. R er antisymmetrisk.

Eksempel.

a) La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og $\subseteq$ være inklusjonsordningen på potensmengden til $\mathcal{E}$.

1. $\subseteq$ er *refleksiv* fordi $A \subseteq A$ for alle mengder A.
2. $\subseteq$ er *transitiv* fordi $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ alltid vil medføre at $A \subseteq C$
3. $\subseteq$ er *antisymmetrisk* fordi $A = B$ når $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Dette viser at $\subseteq$ er en partiell ordning.

Eksempel (Fortsatt).

b) La $\leqslant$ være den vanlige "mindre-eller-lik" relasjonen på $\mathbb{J}$.

$\leqslant$ er opplagt både refleksiv, transitiv og antisymmetrisk, så $\leqslant$ er en partiell ordning.

$<$ er derimot *IKKE* en partiell ordning, fordi $<$ ikke er *refleksiv*.

c) Hvis vi ordner studentene i MAT1030 etter oppnådd karakter, med A øverst, F langt nede, men "ikke møtt" og "trukket seg før eksamen" enda lenger nede, har vi ikke en partiell ordning.

Siden det er mer enn 8 studenter, må minst to stykker lide samme MAT1030-skjebne.

Disse vil stå likt, men være forskjellige personer.

Det betyr at denne relasjonen ikke er *antisymmetrisk*

- Det er en viktig forskjell mellom ordningen av potensmengden til $\mathcal{E}$ og ordningen av $\mathbb{J}$.
- Hvis vi har to tall a og b vil en av tre holde:

1. $a = b$
2. $a < b$
3. $b < a$

- For inklusjon har vi en fjerde mulighet, nemlig at ingen av A eller B er inneholdt i den andre.
- Vi fanger opp denne forskjellen i en definisjon:

Definisjon.

La R være en partiell ordning på en mengde A.

R kalles total dersom vi for alle a og b i A har at

$$aRb \vee bRa.$$

Merk.

- Det er for totale ordninger at vi har gode sorteringsalgoritmer.
- Utviklingen av slike algoritmer overlater vi til foreleserne i programmering, de er flinkere til å finne effektive algoritmer.

En utfordring

- Dette er en oppgave for de som har lyst til å se hvor gode de er til å resonnere rundt de generelle definisjonene vi har gitt.
- Vi forventer ikke at studentene skal kunne løse slike oppgaver til eksamen.

Oppgave.

La R være en relasjon på en mengde A.

Vi kaller R en preordning hvis R er transitiv og refleksiv.

Definer relasjonen S på A ved aSb når $aRb \wedge bRa$.

a) Vis at S er en ekvivalensrelasjon på A.

Der er vanlig å skrive A/S for mengden av ekvivalensklasser $E(a)$ til ekvivalensrelasjonen S.

Oppgave (Fortsatt).
Vi definerer en relasjon $\hat{R}$ på A/S ved

$$E(a)\hat{R}E(b)$$

om aRb

b) Vis at det ikke spiller noen rolle hvilke elementer i ekvivalensklassene $E(a)$ og $E(b)$ vi bruker.

c) Vis at $\hat{R}$ er en partiell ordning på mengden av ekvivalensklasser.

En digresjon

- Hvis A er en endelig mengde finnes det
  $|A|^2$ elementer i $A \times A$, og

  $$2^{|A|^2}$$

  forskjellige relasjoner på A.
- Hvis eksempelvis $|A| = 10$ vil det finnes 2^{100} relasjoner på A.
- Hvis vi trekker en relasjon helt vilkårlig, ved eksempelvis myntkast for hvert par (a, b), er sannsynligheten forsvinnende liten for at resultatet blir en av de pene relasjonstypene vi har sett på.