MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 13: Funksjoner

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

2. mars 2010

(Sist oppdatert: 2010-03-02 14:12)

Kapittel 6: Funksjoner

Forrige uke

Forrige uke

- Forrige forelesning snakket vi om relasjoner.

Forrige uke

- Forrige forelesning snakket vi om relasjoner.
- Vi snakket om ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.

Forrige uke

- Forrige forelesning snakket vi om relasjoner.
- Vi snakket om ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.
- Vi definerte partielle ordninger og totale ordninger.

Forrige uke

- Forrige forelesning snakket vi om relasjoner.
- Vi snakket om ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.
- Vi definerte partielle ordninger og totale ordninger.
- Deretter begynte vi å snakke litt om funksjoner.

Forrige uke

- Forrige forelesning snakket vi om relasjoner.
- Vi snakket om ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.
- Vi definerte partielle ordninger og totale ordninger.
- Deretter begynte vi å snakke litt om funksjoner.
- Det skal vi fortsette med nå.

Forrige uke

- Forrige forelesning snakket vi om relasjoner.
- Vi snakket om ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.
- Vi definerte partielle ordninger og totale ordninger.
- Deretter begynte vi å snakke litt om funksjoner.
- Det skal vi fortsette med nå.
- Vi gjentar de siste minuttene fra onsdag.

Forrige uke

- Forrige forelesning snakket vi om relasjoner.
- Vi snakket om ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.
- Vi definerte partielle ordninger og totale ordninger.
- Deretter begynte vi å snakke litt om funksjoner.
- Det skal vi fortsette med nå.
- Vi gjentar de siste minuttene fra onsdag.
- Før det: Er det noen spørsmål?

Funksjoner

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som
  - Heltallsverdien til $\frac{n}{m}$.

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som
  - Heltallsverdien til $\frac{n}{m}$.
  - Primtall nr. n.

Funksjoner

- Fra skolematematikken kjenner man funksjoner definert ved uttrykk som
  - $f(x) = x^2 + 3x + 4$
  - $g(x) = \sin x$
  - $h(x) = e^{2\ln(x)+27}$
- Vi har også støtt på tallteoretiske funksjoner som
  - Heltallsverdien til $\frac{n}{m}$.
  - Primtall nr. n.
  - Største felles divisor av n og m.

Funksjoner

Funksjoner

Felles for alle disse eksemplene er at det er en sammenheng mellom

argumentet eller argumentene

Funksjoner

Felles for alle disse eksemplene er at det er en sammenheng mellom

argumentet eller argumentene

til funksjonen, og

verdien

Funksjoner

Felles for alle disse eksemplene er at det er en sammenheng mellom

argumentet eller argumentene

til funksjonen, og

verdien

til funksjonen.

Funksjoner

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.

Vi skal stort sett holde oss til presisjonsnivået i boka.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.

Vi skal stort sett holde oss til presisjonsnivået i boka.

Hovedpoenget er at vi skal tolke ordet *regel* på neste side så liberalt som mulig.

Funksjoner

Det er vanlig å fremstille en funksjon som en slags svart boks hvor

- Vi forer boksen med funksjonsargumentene.
- Boksen bearbeider dataene.
- Boksen gir oss funksjonsverdien.

Som intuitivt bilde er dette en grei beskrivelse.

Som presis matematisk definisjon holder det ikke helt.

Vi skal stort sett holde oss til presisjonsnivået i boka.

Hovedpoenget er at vi skal tolke ordet *regel* på neste side så liberalt som mulig.

For fullstendighetens skyld, skal vi, om noen minutter, ta med den vanlige formelle definisjonen av hva en funksjon er.

Funksjoner

Funksjoner

Definisjon

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk

- Som sagt skal ordet *regel* tolkes så liberalt som mulig, men, som vi skal se, med en smule forsiktighet.

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \to Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk

- Som sagt skal ordet *regel* tolkes så liberalt som mulig, men, som vi skal se, med en smule forsiktighet.
- Det er ikke noe krav om at det skal foreligge noen regler som mennesker eller maskiner kan følge.

Funksjoner

Definisjon

La X og Y være to mengder.

En funksjon $f : X \rightarrow Y$ er en regel som for hver $x \in X$ gir oss en, og bare en, $y = f(x)$ i Y.

Merk

- Som sagt skal ordet *regel* tolkes så liberalt som mulig, men, som vi skal se, med en smule forsiktighet.
- Det er ikke noe krav om at det skal foreligge noen regler som mennesker eller maskiner kan følge.
- Det eneste kravet er at $f(x)$ skal fins i Y, og at uttrykket $f(x)$ ikke kan være flertydig.

Eksempler

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.
- La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og la A være en delmengde av $\mathcal{E}$

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.
- La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og la A være en delmengde av $\mathcal{E}$
- Vi definerte $\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} \ : \ x \notin A\}$.

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.
- La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og la A være en delmengde av $\mathcal{E}$
- Vi definerte $\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} \ : \ x \notin A\}$.
- Hver A har en og bare en komplement-mengde, så $f(A) = \overline{A}$ er en funksjon.

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.
- La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og la A være en delmengde av $\mathcal{E}$
- Vi definerte $\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} \ : \ x \notin A\}$.
- Hver A har en og bare en komplement-mengde, så $f(A) = \overline{A}$ er en funksjon.
- Her er X lik Y lik potensmengden til $\mathcal{E}$.

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.
- La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og la A være en delmengde av $\mathcal{E}$
- Vi definerte $\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} \,:\, x \notin A\}$.
- Hver A har en og bare en komplement-mengde, så $f(A) = \overline{A}$ er en funksjon.
- Her er X lik Y lik potensmengden til $\mathcal{E}$.
- På samme måte kan vi oppfatte $\cap$ og $\cup$ som funksjoner.

Eksempler

Eksempel (Funksjoner)

- Vi skal se på noe av det vi har snakket om før, og se hvorvidt funksjoner er involvert.
- Vi skal legge vekt på andre eksempler enn de dere kjenner fra skolematematikken.
- La $\mathcal{E}$ være en universell mengde, og la A være en delmengde av $\mathcal{E}$
- Vi definerte $\overline{A} = \{x \in \mathcal{E} \ : \ x \notin A\}$.
- Hver A har en og bare en komplement-mengde, så $f(A) = \overline{A}$ er en funksjon.
- Her er X lik Y lik potensmengden til $\mathcal{E}$.
- På samme måte kan vi oppfatte $\cap$ og $\cup$ som funksjoner.
- Hvis Y er potensmengden til $\mathcal{E}$ og $X = Y^2$, vil $\cap$ og $\cup$ være funksjoner fra X til Y.

Eksempler

Eksempler

Eksempel

Eksempler

Eksempel

- Quicksort er en algoritme som sorterer elementene i en liste etter størrelse.

Eksempler

Eksempel

- Quicksort er en algoritme som sorterer elementene i en liste etter størrelse.
- Quicksort gir mening hver gang listen er hentet fra en totalt ordnet mengde.

Eksempler

Eksempel

- Quicksort er en algoritme som sorterer elementene i en liste etter størrelse.
- Quicksort gir mening hver gang listen er hentet fra en totalt ordnet mengde.
- Da beregner Quicksort funksjonen som tar en vilkårlig liste som argument og gir den sorterte listen som verdi.

Eksempler

Eksempel

- Quicksort er en algoritme som sorterer elementene i en liste etter størrelse.
- Quicksort gir mening hver gang listen er hentet fra en totalt ordnet mengde.
- Da beregner Quicksort funksjonen som tar en vilkårlig liste som argument og gir den sorterte listen som verdi.
- Vi kan finne en annen algoritme Slowsort for sortering av elementene i en liste, og den vil definere den samme funksjonen, men være en annen algoritme.

Eksempler

Eksempel

- Quicksort er en algoritme som sorterer elementene i en liste etter størrelse.
- Quicksort gir mening hver gang listen er hentet fra en totalt ordnet mengde.
- Da beregner Quicksort funksjonen som tar en vilkårlig liste som argument og gir den sorterte listen som verdi.
- Vi kan finne en annen algoritme Slowsort for sortering av elementene i en liste, og den vil definere den samme funksjonen, men være en annen algoritme.
- Det er forbindelsen mellom argument og verdi som bestemmer hvilken funksjon vi har, ikke hvordan vi kommer fra argument til verdi.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjon

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjon

a) Hvis $f : X \to Y$ er en funksjon kaller vi

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjon

a) Hvis $f : X \to Y$ er en funksjon kaller vi

- X for definisjonsområdet til f.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjon

a) Hvis $f : X \to Y$ er en funksjon kaller vi

- X for definisjonsområdet til f.
- Y for verdiområdet til f.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjon

a) Hvis $f : X \to Y$ er en funksjon kaller vi
- X for definisjonsområdet til f.
- Y for verdiområdet til f.

b) Bildet eller bildemengden til f er

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjon

a) Hvis $f : X \to Y$ er en funksjon kaller vi
- X for definisjonsområdet til f.
- Y for verdiområdet til f.

b) Bildet eller bildemengden til f er

$$\{f(x) \ : \ x \in X\}$$

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjon

a) Hvis $f : X \to Y$ er en funksjon kaller vi
- X for definisjonsområdet til f.
- Y for verdiområdet til f.

b) Bildet eller bildemengden til f er

$$\{f(x) \ : \ x \in X\}$$

c) Vi kan skrive $f[X]$ for bildet til f.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Definer $f(x) = e^x$ som en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Definer $f(x) = e^x$ som en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.
  Da vil:

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Definer $f(x) = e^x$ som en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.
  Da vil:
  - *Definisjonsområdet* til f være hele $\mathbb{R}$.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Definer $f(x) = e^x$ som en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

  Da vil:

  - *Definisjonsområdet* til f være hele $\mathbb{R}$.
  - *Verdiområdet* til f være hele $\mathbb{R}$.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Definer $f(x) = e^x$ som en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

  Da vil:

  - *Definisjonsområdet* til f være hele $\mathbb{R}$.
  - *Verdiområdet* til f være hele $\mathbb{R}$.
  - *Bildet* til f være mengden av positive reelle tall.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- La $A \subseteq \mathcal{E}$ være en mengde, og definer

$$f_A(B) = A \cap B$$

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- La $A \subseteq \mathcal{E}$ være en mengde, og definer

$$f_A(B) = A \cap B$$

som en funksjon fra potensmengden X til $\mathcal{E}$ til seg selv.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- La $A \subseteq \mathcal{E}$ være en mengde, og definer

$$f_A(B) = A \cap B$$

som en funksjon fra potensmengden X til $\mathcal{E}$ til seg selv.

- Da er X både definisjonsområdet og verdiområdet til f_A, mens bildemengden vil være potensmengden til A.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Innledningsvis i disse forelesningene konstruerte vi en pseudokode for å beregne $|n - m|$ fra n og m.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Innledningsvis i disse forelesningene konstruerte vi en pseudokode for å beregne $|n - m|$ fra n og m.
- I dette tilfellet var definisjonsområdet mengden av par av ikke-negative hele tall, verdiområdet og bildemengden lik mengden av ikke-negative hele tall.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Innledningsvis i disse forelesningene konstruerte vi en pseudokode for å beregne $|n - m|$ fra n og m.
- I dette tilfellet var definisjonsområdet mengden av par av ikke-negative hele tall, verdiområdet og bildemengden lik mengden av ikke-negative hele tall.
- Da vi satte opp sannhetsverditabeller for sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p, q og r, konstruerte vi i virkeligheten funksjoner fra mengden X av tripler fra $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ til $Y = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Eksempel

- Innledningsvis i disse forelesningene konstruerte vi en pseudokode for å beregne $|n - m|$ fra n og m.
- I dette tilfellet var definisjonsområdet mengden av par av ikke-negative hele tall, verdiområdet og bildemengden lik mengden av ikke-negative hele tall.
- Da vi satte opp sannhetsverditabeller for sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p, q og r, konstruerte vi i virkeligheten funksjoner fra mengden X av tripler fra $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ til $Y = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$.

  To sammensatte utsagn er logisk ekvivalente når disse funksjonene er like.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjonsområdet og verdiområdet

- En sannhetsverditabell beskriver egentlig en funksjon på tabellform.

Definisjonsområdet og verdiområdet

- En sannhetsverditabell beskriver egentlig en funksjon på tabellform.
- I prinsippet kan alle funksjoner hvor definisjonsområdet er en liten, endelig mengde beskrives på tabellform.

Definisjonsområdet og verdiområdet

- En sannhetsverditabell beskriver egentlig en funksjon på tabellform.
- I prinsippet kan alle funksjoner hvor definisjonsområdet er en liten, endelig mengde beskrives på tabellform.
- Vi illustrerer det på tavlen.

Definisjonsområdet og verdiområdet

- En sannhetsverditabell beskriver egentlig en funksjon på tabellform.
- I prinsippet kan alle funksjoner hvor definisjonsområdet er en liten, endelig mengde beskrives på tabellform.
- Vi illustrerer det på tavlen.
- En alternativ måte å beskrive slike funksjoner er ved å bruke et pildiagram,

Definisjonsområdet og verdiområdet

- En sannhetsverditabell beskriver egentlig en funksjon på tabellform.
- I prinsippet kan alle funksjoner hvor definisjonsområdet er en liten, endelig mengde beskrives på tabellform.
- Vi illustrerer det på tavlen.
- En alternativ måte å beskrive slike funksjoner er ved å bruke et pildiagram, se illustrasjon på tavlen.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjonsområdet og verdiområdet

Merk

Definisjonsområdet og verdiområdet

Merk

- Læreboka bruker *domain* for definisjonsområde og *codomain* for verdiområde.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Merk

- Læreboka bruker *domain* for definisjonsområde og *codomain* for verdiområde.
- Det er ikke uvanlig å bruke ordene *domene* og *kodomene* på norsk.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Merk

- Læreboka bruker *domain* for definisjonsområde og *codomain* for verdiområde.
- Det er ikke uvanlig å bruke ordene *domene* og *kodomene* på norsk.
- Vi skal holde oss til betegnelsene *definisjonsområde* og *verdiområde* i disse forelesningene.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Definisjonsområdet og verdiområdet

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

Definisjonsområdet og verdiområdet

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

En funksjon fra A til B er en delmengde $f \subseteq A \times B$ slik at

Definisjonsområdet og verdiområdet

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

En funksjon fra A til B er en delmengde $f \subseteq A \times B$ slik at

- For alle $a \in A$ finnes en og bare en $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

En funksjon fra A til B er en delmengde $f \subseteq A \times B$ slik at

- For alle $a \in A$ finnes en og bare en $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$.
- Vi skriver $b = f(a)$ for $(a, b) \in f$.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

En funksjon fra A til B er en delmengde $f \subseteq A \times B$ slik at

- For alle $a \in A$ finnes en og bare en $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$.
- Vi skriver $b = f(a)$ for $(a, b) \in f$.

Hvis man skal bruke mengdelæren til å legge et grunnlag for matematikken, er dette den offisielle definisjonen av hva en funksjon er.

Definisjonsområdet og verdiområdet

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

En funksjon fra A til B er en delmengde $f \subseteq A \times B$ slik at

- For alle $a \in A$ finnes en og bare en $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$.
- Vi skriver $b = f(a)$ for $(a, b) \in f$.

Hvis man skal bruke mengdelæren til å legge et grunnlag for matematikken, er dette den offisielle definisjonen av hva en funksjon er.

Her er regelen for å beregne $f(a)$ at

Definisjonsområdet og verdiområdet

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

En funksjon fra A til B er en delmengde $f \subseteq A \times B$ slik at

- For alle $a \in A$ finnes en og bare en $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$.
- Vi skriver $b = f(a)$ for $(a, b) \in f$.

Hvis man skal bruke mengdelæren til å legge et grunnlag for matematikken, er dette den offisielle definisjonen av hva en funksjon er.

Her er regelen for å beregne $f(a)$ at

$$f(a) \text{ er den } b \text{ som er slik at } (a, b) \in f.$$

Definisjonsområdet og verdiområdet

Hvis vi skal gi en enda mer stringent innføring i funksjoner, kan vi definere en funksjon som følger:

En funksjon fra A til B er en delmengde $f \subseteq A \times B$ slik at

- For alle $a \in A$ finnes en og bare en $b \in B$ slik at $(a, b) \in f$.
- Vi skriver $b = f(a)$ for $(a, b) \in f$.

Hvis man skal bruke mengdelæren til å legge et grunnlag for matematikken, er dette den offisielle definisjonen av hva en funksjon er.

Her er regelen for å beregne $f(a)$ at

$$f(a) \text{ er den } b \text{ som er slik at } (a, b) \in f.$$

Vi skal fortsette med det presisjonsnivået vi har lagt opp til.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

- Funksjoner har en ting felles med relasjoner:

Injektive funksjoner

- Funksjoner har en ting felles med relasjoner:

  Noen av dem har spesielle egenskaper som er verd en egen betegnelse.

Injektive funksjoner

- Funksjoner har en ting felles med relasjoner:

  Noen av dem har spesielle egenskaper som er verd en egen betegnelse.
- Vi skal først se på injektive funksjoner.

Injektive funksjoner

- Funksjoner har en ting felles med relasjoner:

  Noen av dem har spesielle egenskaper som er verd en egen betegnelse.
- Vi skal først se på injektive funksjoner.
- Andre betegnelser er 1-1-funksjoner og enentydige funksjoner.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- La w være et 32-bits binært tall, og la $\mathtt{f}(w)$ være det heltallet som representeres av w.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- La w være et 32-bits binært tall, og la $\mathsf{f}(w)$ være det heltallet som representeres av w.
- Hvis $v \neq w$ vil $\mathsf{f}(v) \neq \mathsf{f}(w)$ siden vi ikke bruker to forskjellige binære representasjoner av det samme tallet.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- La w være et 32-bits binært tall, og la $\mathtt{f}(w)$ være det heltallet som representeres av w.
- Hvis $v \neq w$ vil $\mathtt{f}(v) \neq \mathtt{f}(w)$ siden vi ikke bruker to forskjellige binære representasjoner av det samme tallet.
- Hvis vi oppfatter $\mathtt{f}$ som en *input-output*-forbindelse, ser vi at det er én input per output.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- La w være et 32-bits binært tall, og la $\mathsf{f}(w)$ være det heltallet som representeres av w.
- Hvis $v \neq w$ vil $\mathsf{f}(v) \neq \mathsf{f}(w)$ siden vi ikke bruker to forskjellige binære representasjoner av det samme tallet.
- Hvis vi oppfatter f som en *input-output*-forbindelse, ser vi at det er én input per output.
- Dette er et eksempel på en en-til-en-funksjon eller *injektiv* funksjon.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- En telefonselger vil ha datastøttet oppringing til kunder.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- En telefonselger vil ha datastøttet oppringing til kunder.
- For ikke å irritere kundene unødig, bør ikke telefonselgeren kontakte samme kunde to ganger.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- En telefonselger vil ha datastøttet oppringing til kunder.
- For ikke å irritere kundene unødig, bør ikke telefonselgeren kontakte samme kunde to ganger.
- Hvis $R(n)$ er kunde nummer n selgeren kontakter, betyr dette kravet at $R(n) \neq R(m)$ når $n \neq m$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- En telefonselger vil ha datastøttet oppringing til kunder.
- For ikke å irritere kundene unødig, bør ikke telefonselgeren kontakte samme kunde to ganger.
- Hvis $R(n)$ er kunde nummer n selgeren kontakter, betyr dette kravet at $R(n) \neq R(m)$ når $n \neq m$.
- Programmet selgeren støtter seg på må være slik at oppringningsfunksjonen R blir injektiv, eller enentydig.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Den formelle definisjonen vil være:

Injektive funksjoner

Den formelle definisjonen vil være:

Definisjon

Injektive funksjoner

Den formelle definisjonen vil være:

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

Injektive funksjoner

Den formelle definisjonen vil være:

Definisjon

La $f : X \to Y$ være en funksjon.

f kalles injektiv hvis vi for alle x og y i X har at

Injektive funksjoner

Den formelle definisjonen vil være:

Definisjon

La $f : X \to Y$ være en funksjon.

f kalles injektiv hvis vi for alle x og y i X har at

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Merk

Injektive funksjoner

Merk

- Vi har brukt den kontrapositive versjonen i definisjonen.

Injektive funksjoner

Merk

- Vi har brukt den kontrapositive versjonen i definisjonen.
  En ekvivalent formulering vil være

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- La $f(x) = x^2$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- La $f(x) = x^2$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

  Da er ikke f injektiv fordi $1 \neq -1$ mens $f(1) = f(-1)$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- La $f(x) = x^2$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

  Da er ikke f injektiv fordi $1 \neq -1$ mens $f(1) = f(-1)$.
- Hvis vi begrenser definisjonsområdet til de ikke-negative tallene $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ blir funksjonen injektiv.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- La $f(x) = x^2$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

  Da er ikke f injektiv fordi $1 \neq -1$ mens $f(1) = f(-1)$.
- Hvis vi begrenser definisjonsområdet til de ikke-negative tallene $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ blir funksjonen injektiv.
- Funksjonen som ordner en sekvens av ord alfabetisk er ikke injektiv, fordi ord-sekvensene "Per, Pål, Espen" og "Espen, Pål, Per" er forskjellige, men de blir like når vi ordner dem alfabetisk.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel

Injektive funksjoner

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$

Injektive funksjoner

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.

Injektive funksjoner

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.

Injektive funksjoner

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt verdiområdet, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.

Injektive funksjoner

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt verdiområdet, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.
- Vi ser derfor på f som en funksjon

Injektive funksjoner

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt verdiområdet, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.
- Vi ser derfor på f som en funksjon

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}$$

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så f er ikke injektiv.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så f er ikke injektiv.
- Kan vi bestemme bildemengden til f?

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så f er ikke injektiv.
- Kan vi bestemme bildemengden til f?
- Bildemengden vil være $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 18\}$.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
- Når vi har relasjoner som dette, bør vi stille følgende spørsmål:

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
- Når vi har relasjoner som dette, bør vi stille følgende spørsmål:
  - Er R eller S refleksiv?

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
- Når vi har relasjoner som dette, bør vi stille følgende spørsmål:
  - Er R eller S refleksiv?
  - Er R eller S irrefleksiv?

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
- Når vi har relasjoner som dette, bør vi stille følgende spørsmål:
    - Er R eller S refleksiv?
    - Er R eller S irrefleksiv?
    - Er R eller S symmetrisk?

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
- Når vi har relasjoner som dette, bør vi stille følgende spørsmål:
  - Er R eller S refleksiv?
  - Er R eller S irrefleksiv?
  - Er R eller S symmetrisk?
  - Er R eller S antisymmetrisk?

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
- Når vi har relasjoner som dette, bør vi stille følgende spørsmål:
  - Er R eller S refleksiv?
  - Er R eller S irrefleksiv?
  - Er R eller S symmetrisk?
  - Er R eller S antisymmetrisk?
  - Er R eller S transitiv?

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  1. Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
    1. Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
    2. Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  1. Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  2. Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  3. Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
    1. Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
    2. Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
    3. Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
    4. Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  1. Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  2. Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  3. Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
  4. Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.
  5. Siden f ikke er injektiv og R er symmetrisk, kan ikke R være *antisymmetrisk*.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
    1. Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
    2. Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
    3. Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
    4. Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.
    5. Siden f ikke er injektiv og R er symmetrisk, kan ikke R være *antisymmetrisk*.
- 1., 2. og 3. viser at R er en ekvivalensrelasjon.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  1. Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  2. Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  3. Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
  4. Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.
  5. Siden f ikke er injektiv og R er symmetrisk, kan ikke R være *antisymmetrisk*.
- 1., 2. og 3. viser at R er en ekvivalensrelasjon.
- Vi har ikke brukt noen spesielle egenskaper ved A eller f, så relasjoner konstruert på denne måten vil alltid være ekvivalensrelasjoner.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$
  4. $\{4, 13, 22, 31, 40\}$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$
  4. $\{4, 13, 22, 31, 40\}$
  5. $\{5, 14, 23, 32, 41, 50\}$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$
  4. $\{4, 13, 22, 31, 40\}$
  5. $\{5, 14, 23, 32, 41, 50\}$

     osv.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
    - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at aSc.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er *transitiv*.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er *transitiv*.
  - Anta at aSb og bSa

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er *transitiv*.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leqslant f(b)$ og $f(b) \leqslant f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \lor (aRb \land a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \land a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er *transitiv*.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leqslant f(b)$ og $f(b) \leqslant f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.
    - Da er $a \leqslant b$ og $b \leqslant a$ så $a = b$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \lor (aRb \land a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \land a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er *transitiv*.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leqslant f(b)$ og $f(b) \leqslant f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.
    - Da er $a \leqslant b$ og $b \leqslant a$ så $a = b$
  - Det følger at S er *antisymmetrisk*.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leqslant b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leqslant a$ for alle a, så andre ledd i disjunksjonen er alltid sant.
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leqslant b \leqslant c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er *transitiv*.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leqslant f(b)$ og $f(b) \leqslant f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.
    - Da er $a \leqslant b$ og $b \leqslant a$ så $a = b$
  - Det følger at S er *antisymmetrisk*.
- Konklusjonen er at S er en partiell ordning.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Følgende oppgave skal leses i sammenheng med teksten på de foregående sidene.

Injektive funksjoner

Følgende oppgave skal leses i sammenheng med teksten på de foregående sidene.

Oppgave

Vis at S er en total ordning, og skriv ned de 10 S-første tallene.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
    1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.
    2. B er mengden av uendelige desimalutviklinger α og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.
  2. B er mengden av uendelige desimalutviklinger α og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.
  3. C er mengden av positive reelle tall som har en eksakt 32-bits representasjon r, og hvis r representerer tallet x lar vi $h(r)$ være tallet som representerer $\sqrt{x}$.

Injektive funksjoner

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.
  2. B er mengden av uendelige desimalutviklinger α og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.
  3. C er mengden av positive reelle tall som har en eksakt 32-bits representasjon r, og hvis r representerer tallet x lar vi $h(r)$ være tallet som representerer $\sqrt{x}$.
- f vil være injektiv, for hvis vi speiler to forskjellige ord, vil speilbildene bli forskjellige.

Injektive funksjoner

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots.$$

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24}, vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12}.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24}, vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12}.

  Vi har altså langt færre binære tall til disposisjon for å representere $\sqrt{x}$ enn x selv, så funksjonen kan ikke være injektiv.

Injektive funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24}, vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12}.

  Vi har altså langt færre binære tall til disposisjon for å representere $\sqrt{x}$ enn x selv, så funksjonen kan ikke være injektiv.
- Her har vi egentlig brukt noe som kalles skuffeprinsippet, dueslagsprinsippet eller på engelsk the pigeon hole principle.