MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 16: Rekursjon og induksjon

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

10. mars 2010

(Sist oppdatert: `2010-03-10 12:36`)

Forelesning 16

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.
- Induksjonsbevis er et effektivt matematisk virkemiddel.

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.
- Induksjonsbevis er et effektivt matematisk virkemiddel.
- Våre eksempler vil ofte gå ut på å vise at en formel for det generelle leddet i en følge som vi har definert ved rekursjon er riktig.

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.
- Induksjonsbevis er et effektivt matematisk virkemiddel.
- Våre eksempler vil ofte gå ut på å vise at en formel for det generelle leddet i en følge som vi har definert ved rekursjon er riktig.
- I flere eksempler vil den naturlige gangen være

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.
- Induksjonsbevis er et effektivt matematisk virkemiddel.
- Våre eksempler vil ofte gå ut på å vise at en formel for det generelle leddet i en følge som vi har definert ved rekursjon er riktig.
- I flere eksempler vil den naturlige gangen være

  problem

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.
- Induksjonsbevis er et effektivt matematisk virkemiddel.
- Våre eksempler vil ofte gå ut på å vise at en formel for det generelle leddet i en følge som vi har definert ved rekursjon er riktig.
- I flere eksempler vil den naturlige gangen være

  $$\text{problem} \to \text{rekursjon}$$

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.
- Induksjonsbevis er et effektivt matematisk virkemiddel.
- Våre eksempler vil ofte gå ut på å vise at en formel for det generelle leddet i en følge som vi har definert ved rekursjon er riktig.
- I flere eksempler vil den naturlige gangen være

$$\text{problem} \rightarrow \text{rekursjon} \rightarrow \text{formel}$$

Rekursjon og induksjon

- Tirsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.
- Induksjonsbevis er et effektivt matematisk virkemiddel.
- Våre eksempler vil ofte gå ut på å vise at en formel for det generelle leddet i en følge som vi har definert ved rekursjon er riktig.
- I flere eksempler vil den naturlige gangen være

$$\text{problem} \rightarrow \text{rekursjon} \rightarrow \text{formel} \rightarrow \text{induksjonsbevis}$$

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

- Formatene for å definere en funksjon f på $\mathbb{N}$ ved rekursjon er varianter over

Rekursjon og induksjon

- Formatene for å definere en funksjon f på $\mathbb{N}$ ved rekursjon er varianter over
  1. Definer $f(1)$.

Rekursjon og induksjon

- Formatene for å definere en funksjon f på $\mathbb{N}$ ved rekursjon er varianter over
  1. Definer $f(1)$.
  2. Definer $f(n+1)$ som en funksjon av n og $f(n)$.

Rekursjon og induksjon

- Formatene for å definere en funksjon f på $\mathbb{N}$ ved rekursjon er varianter over
  1. Definer $f(1)$.
  2. Definer $f(n+1)$ som en funksjon av n og $f(n)$.
- Formatene for å bevise et predikat $P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ er varianter over

Rekursjon og induksjon

- Formatene for å definere en funksjon f på $\mathbb{N}$ ved rekursjon er varianter over
  1. Definer $f(1)$.
  2. Definer $f(n+1)$ som en funksjon av n og $f(n)$.
- Formatene for å bevise et predikat $P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ er varianter over
  1. Bevis $P(1)$.

Rekursjon og induksjon

- Formatene for å definere en funksjon f på $\mathbb{N}$ ved rekursjon er varianter over
  1. Definer $f(1)$.
  2. Definer $f(n+1)$ som en funksjon av n og $f(n)$.
- Formatene for å bevise et predikat $P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ er varianter over
  1. Bevis $P(1)$.
  2. Bevis $P(n) \to P(n+1)$ for vilkårlig $n \in \mathbb{N}$.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$
  - $f(n+1) = 3f(n) + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$
  - $f(n+1) = 3f(n) + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Da har vi

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$
  - $f(n+1) = 3f(n) + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Da har vi
  - $f(1) = 1$

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$
  - $f(n+1) = 3f(n) + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Da har vi
  - $f(1) = 1$
  - $f(2) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$
  - $f(n+1) = 3f(n) + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Da har vi
  - $f(1) = 1$
  - $f(2) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$
  - $f(3) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$
  - $f(n+1) = 3f(n) + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Da har vi
  - $f(1) = 1$
  - $f(2) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$
  - $f(3) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$
  - $f(4) = 3 \cdot 13 + 1 = 40$

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$
  - $f(n+1) = 3f(n) + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Da har vi
  - $f(1) = 1$
  - $f(2) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$
  - $f(3) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$
  - $f(4) = 3 \cdot 13 + 1 = 40$
- Vi kan fortsette å regne ut $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$, osv. ettersom f er definert ved rekursjon.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$
  - $g(n+1) = g(n) + 3^n$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$
  - $g(n+1) = g(n) + 3^n$
- Da har vi

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$
  - $g(n+1) = g(n) + 3^n$
- Da har vi
  - $g(1) = 1$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$
  - $g(n+1) = g(n) + 3^n$
- Da har vi
  - $g(1) = 1$
  - $g(2) = 1 + 3 = 4$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$
  - $g(n+1) = g(n) + 3^n$
- Da har vi
  - $g(1) = 1$
  - $g(2) = 1 + 3 = 4$
  - $g(2) = 4 + 3^2 = 13$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$
  - $g(n+1) = g(n) + 3^n$
- Da har vi
  - $g(1) = 1$
  - $g(2) = 1 + 3 = 4$
  - $g(2) = 4 + 3^2 = 13$
  - $g(4) = 13 + 3^3 = 40$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$
  - $g(n+1) = g(n) + 3^n$
- Da har vi
  - $g(1) = 1$
  - $g(2) = 1 + 3 = 4$
  - $g(2) = 4 + 3^2 = 13$
  - $g(4) = 13 + 3^3 = 40$
- Vi kan fortsette å regne ut $g(5)$, $g(6)$, $g(7)$, osv., og vil finne ut at så langt vi kan se vil $f(n) = g(n)$.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Det er da naturlig å gjette på at $f(n) = g(n)$ for alle n.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Det er da naturlig å gjette på at $f(n) = g(n)$ for alle n.
- For å vise det, kan vi prøve å vise at de to rekursive definisjonene er de samme, men vi ser jo at rekursjonsskrittet i de to definisjonene ikke likner på hverandre.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Det er da naturlig å gjette på at $f(n) = g(n)$ for alle n.
- For å vise det, kan vi prøve å vise at de to rekursive definisjonene er de samme, men vi ser jo at rekursjonsskrittet i de to definisjonene ikke likner på hverandre.
- Vi ser at $g(n)$ er summen i en endelig geometrisk rekke

$$g(n) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Det er da naturlig å gjette på at $f(n) = g(n)$ for alle n.
- For å vise det, kan vi prøve å vise at de to rekursive definisjonene er de samme, men vi ser jo at rekursjonsskrittet i de to definisjonene ikke likner på hverandre.
- Vi ser at $g(n)$ er summen i en endelig geometrisk rekke

$$g(n) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

- En slik rekke har en kjent sum

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Siden vi sikkert ikke husker hvordan vi kom frem til denne formelen, og siden vi innfører induksjonsbevis i disse forelesningene, viser vi formelen ved induksjon.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Siden vi sikkert ikke husker hvordan vi kom frem til denne formelen, og siden vi innfører induksjonsbevis i disse forelesningene, viser vi formelen ved induksjon.

  Setter vi $n = 1$ inn i formelen, får vi

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Siden vi sikkert ikke husker hvordan vi kom frem til denne formelen, og siden vi innfører induksjonsbevis i disse forelesningene, viser vi formelen ved induksjon.

  Setter vi $n = 1$ inn i formelen, får vi

$$\frac{3^n - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 = g(1)$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Siden vi sikkert ikke husker hvordan vi kom frem til denne formelen, og siden vi innfører induksjonsbevis i disse forelesningene, viser vi formelen ved induksjon.

  Setter vi $n = 1$ inn i formelen, får vi

  $$\frac{3^n - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 = g(1)$$

  så formelen stemmer for $n = 1$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Siden vi sikkert ikke husker hvordan vi kom frem til denne formelen, og siden vi innfører induksjonsbevis i disse forelesningene, viser vi formelen ved induksjon.

  Setter vi $n = 1$ inn i formelen, får vi

  $$\frac{3^n - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 = g(1)$$

  så formelen stemmer for $n = 1$.
- Anta at formelen stemmer for et tall n, det vil si at

  $$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er

$$g(n+1)$$

Eksempel (Fortsatt)

Da er

$$g(n + 1) = g(n) + 3^n$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er

$$g(n+1) = g(n) + 3^n = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$$

Eksempel (Fortsatt)

Da er

$$g(n+1) = g(n) + 3^n = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$$

$$= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2}$$

Eksempel (Fortsatt)

Da er

$$g(n+1) = g(n) + 3^n = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$$

$$= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2} = \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2}$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er

$$g(n+1) = g(n) + 3^n = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$$

$$= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2} = \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er

$$g(n+1) = g(n) + 3^n = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$$

$$= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2} = \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

som viser at formelen også holder for $g(n+1)$.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

har vi vist

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

har vi vist

$P(1)$ for seg

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

har vi vist

$P(1)$ for seg

1. $P(1) \rightarrow P(2)$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

har vi vist

$P(1)$ for seg

1. $P(1) \rightarrow P(2)$
2. $P(2) \rightarrow P(3)$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

har vi vist

$P(1)$ for seg

1. $P(1) \rightarrow P(2)$
2. $P(2) \rightarrow P(3)$
3. $P(3) \rightarrow P(4)$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

har vi vist

$P(1)$ for seg

1. $P(1) \rightarrow P(2)$
2. $P(2) \rightarrow P(3)$
3. $P(3) \rightarrow P(4)$

   $\ldots$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

har vi vist

$P(1)$ for seg

1. $P(1) \rightarrow P(2)$
2. $P(2) \rightarrow P(3)$
3. $P(3) \rightarrow P(4)$

   $\ldots$

under ett som spesialtilfeller av $P(n) \rightarrow P(n+1)$.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er eksempelvis $P(17)$ en tautologisk konsekvens av alt det vi har bevist.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er eksempelvis $P(17)$ en tautologisk konsekvens av alt det vi har bevist.

Prinsippet bak induksjonsbevis er at vi da vet med sikkerhet at $P(n)$ holder for alle n.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

La nå $Q(n)$ være påstanden

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

La nå $Q(n)$ være påstanden

$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

La nå $Q(n)$ være påstanden

$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Vi skal se at vi også kan vise $\forall n Q(n)$ ved induksjon.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

La nå $Q(n)$ være påstanden

$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Vi skal se at vi også kan vise $\forall n Q(n)$ ved induksjon.

Det vil følge at f og g er de samme funksjonene, eller de samme *følgene*, hvis man ønsker å se på det på den måten.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at

$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er

$$f(n+1)$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er

$$f(n+1) = 3 \cdot f(n) + 1$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er

$$f(n+1) = 3 \cdot f(n) + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er
$$f(n+1) = 3 \cdot f(n) + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + \frac{2}{2}$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er
$$f(n+1) = 3 \cdot f(n) + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er
$$f(n+1) = 3 \cdot f(n) + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$
- Dette viser induksjonskrittet, hvis $Q(n)$ holder, så vil $Q(n+1)$ holde.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er
$$f(n+1) = 3 \cdot f(n) + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$
- Dette viser induksjonskrittet, hvis $Q(n)$ holder, så vil $Q(n+1)$ holde.
- Konklusjonen er at $f(n) = g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$ for alle n.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

I læreboka presenteres et klassisk eksempel på bruk av induksjon:

Rekursjon og induksjon

I læreboka presenteres et klassisk eksempel på bruk av induksjon:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rekursjon og induksjon

I læreboka presenteres et klassisk eksempel på bruk av induksjon:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dette en formel man finner igjen i direkte eller beslektet form i mange viktige sammenhenger.

Rekursjon og induksjon

I læreboka presenteres et klassisk eksempel på bruk av induksjon:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dette en formel man finner igjen i direkte eller beslektet form i mange viktige sammenhenger.

Eksempelvis er det antallet oppgjør i en enkel serie med n lag.

Rekursjon og induksjon

I læreboka presenteres et klassisk eksempel på bruk av induksjon:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dette en formel man finner igjen i direkte eller beslektet form i mange viktige sammenhenger.

Eksempelvis er det antallet oppgjør i en enkel serie med n lag.

Vi skal se på noen andre, delvis beslektede eksempler.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- La $f(n)$ være summen av de første n oddetallene, det vil si at

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- La $f(n)$ være summen av de første n oddetallene, det vil si at

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- La $f(n)$ være summen av de første n oddetallene, det vil si at

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

Da er $f(n) = n^2$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- La $f(n)$ være summen av de første n oddetallene, det vil si at

  $$f(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

  Da er $f(n) = n^2$.
- Vi skal gi et induksjonsbevis.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1)$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1} (2i - 1)$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1}(2i - 1) = 1 = 1^2.$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2.$$

- Deretter må vi gjennomføre induksjonskrittet:

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1 = 1^2.$$

- Deretter må vi gjennomføre induksjonskrittet:

  Anta at $f(n) = n^2$ for en n.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1 = 1^2.$$

- Deretter må vi gjennomføre induksjonskrittet:

  Anta at $f(n) = n^2$ for en n.

  Da er $f(n + 1)$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1 = 1^2.$$

- Deretter må vi gjennomføre induksjonskrittet:

  Anta at $f(n) = n^2$ for en n.

  Da er $f(n+1) = f(n) + 2n + 1$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2.$$

- Deretter må vi gjennomføre induksjonskrittet:

  Anta at $f(n) = n^2$ for en n.

  Da er $f(n+1) = f(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut
$$f(1) = \sum_{i=1}^{1}(2i - 1) = 1 = 1^2.$$
- Deretter må vi gjennomføre induksjonskrittet:
Anta at $f(n) = n^2$ for en n.
Da er $f(n+1) = f(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1 = 1^2.$$

- Deretter må vi gjennomføre induksjonskrittet:

  Anta at $f(n) = n^2$ for en n.

  Da er $f(n+1) = f(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
- Ettersom vi nå har vist både induksjonstarten og induksjonskrittet, følger påstanden ved induksjon.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Hvis vi trekker en rett linje gjennom planet, deler vi planet i to.

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Hvis vi trekker en rett linje gjennom planet, deler vi planet i to.
- Hvis vi trekker en ny linje gjennom planet, deler disse to linjene planet i fire deler.

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Hvis vi trekker en rett linje gjennom planet, deler vi planet i to.
- Hvis vi trekker en ny linje gjennom planet, deler disse to linjene planet i fire deler.
- Hvis vi prøver oss med tre linjer, greier vi ikke å dele planet i mer enn syv deler,

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Hvis vi trekker en rett linje gjennom planet, deler vi planet i to.
- Hvis vi trekker en ny linje gjennom planet, deler disse to linjene planet i fire deler.
- Hvis vi prøver oss med tre linjer, greier vi ikke å dele planet i mer enn syv deler,

  og bruker vi fire linjer greier vi maksimalt å dele planet i 11 deler.

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Hvis vi trekker en rett linje gjennom planet, deler vi planet i to.
- Hvis vi trekker en ny linje gjennom planet, deler disse to linjene planet i fire deler.
- Hvis vi prøver oss med tre linjer, greier vi ikke å dele planet i mer enn syv deler,

  og bruker vi fire linjer greier vi maksimalt å dele planet i 11 deler.
- Kan vi finne en formel for hvor mange felter vi maksimalt kan dele planet i ved hjelp av n linjer?

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $F(n)$ være antall felter vi kan dele planet opp i ved å bruke n rette linjer.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $F(n)$ være antall felter vi kan dele planet opp i ved å bruke n rette linjer.
- Da er $F(1) = 2$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $F(n)$ være antall felter vi kan dele planet opp i ved å bruke n rette linjer.
- Da er $F(1) = 2$.
- Selv om vi ikke kjenner $F(n)$ kan vi uttrykke $F(n+1)$ ved hjelp av $F(n)$:

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $F(n)$ være antall felter vi kan dele planet opp i ved å bruke n rette linjer.
- Da er $F(1) = 2$.
- Selv om vi ikke kjenner $F(n)$ kan vi uttrykke $F(n+1)$ ved hjelp av $F(n)$:
- La $l_1, \ldots, l_n, l_{n+1}$ være $n+1$ rette linjer slik at $l_1, \ldots, l_n$ deler planet opp i $F(n)$ forskjellige felter.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $F(n)$ være antall felter vi kan dele planet opp i ved å bruke n rette linjer.
- Da er $F(1) = 2$.
- Selv om vi ikke kjenner $F(n)$ kan vi uttrykke $F(n+1)$ ved hjelp av $F(n)$:
- La $l_1, \ldots, l_n, l_{n+1}$ være $n+1$ rette linjer slik at $l_1, \ldots, l_n$ deler planet opp i $F(n)$ forskjellige felter.
- Den siste linjen l_{n+1} skjærer hver av de andre linjene høyst en gang, så vi får maksimalt n nye skjæringspunkter.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Skjæringspunktene deler l_{n+1} opp i høyst $n + 1$ linjestykker, og hvert av disse linjestykkene deler et av de gamle feltene i to.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Skjæringspunktene deler l_{n+1} opp i høyst $n + 1$ linjestykker, og hvert av disse linjestykkene deler et av de gamle feltene i to.
- Det betyr at vi får maksimalt $n + 1$ nye felter.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Skjæringspunktene deler l_{n+1} opp i høyst $n + 1$ linjestykker, og hvert av disse linjestykkene deler et av de gamle feltene i to.
- Det betyr at vi får maksimalt $n + 1$ nye felter.
- Da er $F(n + 1) = F(n) + n + 1$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Skjæringspunktene deler l_{n+1} opp i høyst $n+1$ linjestykker, og hvert av disse linjestykkene deler et av de gamle feltene i to.
- Det betyr at vi får maksimalt $n+1$ nye felter.
- Da er $F(n+1) = F(n) + n + 1$
- Den neste jobben blir å finne en formel for $F(n)$ og så vise den ved induksjon.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Skjæringspunktene deler l_{n+1} opp i høyst $n+1$ linjestykker, og hvert av disse linjestykkene deler et av de gamle feltene i to.
- Det betyr at vi får maksimalt $n+1$ nye felter.
- Da er $F(n+1) = F(n) + n + 1$
- Den neste jobben blir å finne en formel for $F(n)$ og så vise den ved induksjon.
- Denne typen formler finner man ofte gjennom prøving og feiling basert på erfaring, men det finnes også generelle metoder.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Skjæringspunktene deler l_{n+1} opp i høyst $n + 1$ linjestykker, og hvert av disse linjestykkene deler et av de gamle feltene i to.
- Det betyr at vi får maksimalt $n + 1$ nye felter.
- Da er $F(n + 1) = F(n) + n + 1$
- Den neste jobben blir å finne en formel for $F(n)$ og så vise den ved induksjon.
- Denne typen formler finner man ofte gjennom prøving og feiling basert på erfaring, men det finnes også generelle metoder.

  Vi skal ikke legge så stor vekt på disse metodene i MAT1030.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:
- Induksjonen starter med $n = 1$:

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:
- Induksjonen starter med $n = 1$:

  $1 + \frac{1(1+1)}{2}$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:
- Induksjonen starter med $n = 1$:
  $1 + \frac{1(1+1)}{2} = 1 + 1$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:
- Induksjonen starter med $n = 1$:
  $1 + \frac{1(1+1)}{2} = 1 + 1 = 2$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:
- Induksjonen starter med $n = 1$:
  $1 + \frac{1(1+1)}{2} = 1 + 1 = 2 = F(1)$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:
- Induksjonen starter med $n = 1$:
  $1 + \frac{1(1+1)}{2} = 1 + 1 = 2 = F(1)$.
- La oss så gjennomføre induksjonskrittet:

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:
- Induksjonen starter med $n = 1$:
  $1 + \frac{1(1+1)}{2} = 1 + 1 = 2 = F(1)$.
- La oss så gjennomføre induksjonskrittet:
- Anta at
$$F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

$$F(n+1)$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

$$F(n+1) = F(n) + n + 1$$

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

$$F(n+1) = F(n) + n + 1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

$$F(n+1) = F(n) + n + 1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

$$F(n+1) = F(n) + n + 1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = 1 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

$$F(n+1) = F(n) + n + 1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = 1 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

- Skal vi være pedantiske kan vi skrive dette om til

$$1 + \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

$$F(n+1) = F(n) + n + 1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = 1 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

- Skal vi være pedantiske kan vi skrive dette om til

$$1 + \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

- Induksjonskrittet er gjennomført, så påstanden er bevist.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Oppgave

Rekursjon og induksjon

Oppgave

- Vi vet at vi kan dele planet opp i to felter ved hjelp av en sirkel.

Rekursjon og induksjon

Oppgave

- Vi vet at vi kan dele planet opp i to felter ved hjelp av en sirkel.
- Vi vet at to sirkler kan skjære hverandre i to punkter

Rekursjon og induksjon

Oppgave

- Vi vet at vi kan dele planet opp i to felter ved hjelp av en sirkel.
- Vi vet at to sirkler kan skjære hverandre i to punkter
- Vi vet at $2n$ punkter vil dele en sirkel opp i $2n$ buestykker.

Rekursjon og induksjon

Oppgave

- Vi vet at vi kan dele planet opp i to felter ved hjelp av en sirkel.
- Vi vet at to sirkler kan skjære hverandre i to punkter
- Vi vet at $2n$ punkter vil dele en sirkel opp i $2n$ buestykker.
- Bruk dette til å definere funksjonen $G(n)$ ved rekursjon, hvor $G(n)$ er antall områder vi kan dele planet opp i ved hjelp av n sirkler.

Rekursjon og induksjon

Oppgave

- Vi vet at vi kan dele planet opp i to felter ved hjelp av en sirkel.
- Vi vet at to sirkler kan skjære hverandre i to punkter
- Vi vet at $2n$ punkter vil dele en sirkel opp i $2n$ buestykker.
- Bruk dette til å definere funksjonen $G(n)$ ved rekursjon, hvor $G(n)$ er antall områder vi kan dele planet opp i ved hjelp av n sirkler.
- Foreslå en formel for $G(n)$ og se om du kan vise den ved induksjon.

Rekursjon og induksjon

Oppgave

- Vi vet at vi kan dele planet opp i to felter ved hjelp av en sirkel.
- Vi vet at to sirkler kan skjære hverandre i to punkter
- Vi vet at $2n$ punkter vil dele en sirkel opp i $2n$ buestykker.
- Bruk dette til å definere funksjonen $G(n)$ ved rekursjon, hvor $G(n)$ er antall områder vi kan dele planet opp i ved hjelp av n sirkler.
- Foreslå en formel for $G(n)$ og se om du kan vise den ved induksjon.

Hvorfor forteller svaret på denne oppgaven oss at Venndiagrammer er uegnet til å studere Boolske kombinasjoner av mange mengder?

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Enkelte regneoperasjoner tar lengere tid jo større input er.

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Enkelte regneoperasjoner tar lengere tid jo større input er.
- Det kan være av interesse å finne ut hvor mange “regneskritt” en oppgave krever, avhengig av hvor stort input er.

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Enkelte regneoperasjoner tar lengere tid jo større input er.
- Det kan være av interesse å finne ut hvor mange “regneskritt” en oppgave krever, avhengig av hvor stort input er.
- Eksempelvis kan vi prøve å finne ut av hvor mange operasjoner som kreves for å utføre sorteringsalgoritmer i

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Enkelte regneoperasjoner tar lengere tid jo større input er.
- Det kan være av interesse å finne ut hvor mange "regneskritt" en oppgave krever, avhengig av hvor stort input er.
- Eksempelvis kan vi prøve å finne ut av hvor mange operasjoner som kreves for å utføre sorteringsalgoritmer i
  - Verste tilfelle

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Enkelte regneoperasjoner tar lengere tid jo større input er.
- Det kan være av interesse å finne ut hvor mange “regneskritt” en oppgave krever, avhengig av hvor stort input er.
- Eksempelvis kan vi prøve å finne ut av hvor mange operasjoner som kreves for å utføre sorteringsalgoritmer i
  - Verste tilfelle
  - I gjennomsnitt

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vanligvis greier man seg med omtrentlige verdier, men ved behov kan man bruke rekursjon og induksjon til å finne nøyaktige svar.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vanligvis greier man seg med omtrentlige verdier, men ved behov kan man bruke rekursjon og induksjon til å finne nøyaktige svar.
- Vi kan sortere elementene i en liste ved systematisk å bytte om på naboer som ligger i feil rekkefølge.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vanligvis greier man seg med omtrentlige verdier, men ved behov kan man bruke rekursjon og induksjon til å finne nøyaktige svar.
- Vi kan sortere elementene i en liste ved systematisk å bytte om på naboer som ligger i feil rekkefølge.
- La $S(n)$ være det maksimale antall slike bytter vi må foreta oss for å sortere en liste med n elementer.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vanligvis greier man seg med omtrentlige verdier, men ved behov kan man bruke rekursjon og induksjon til å finne nøyaktige svar.
- Vi kan sortere elementene i en liste ved systematisk å bytte om på naboer som ligger i feil rekkefølge.
- La $S(n)$ være det maksimale antall slike bytter vi må foreta oss for å sortere en liste med n elementer.
- Vi ser at $S(1) = 0$

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vanligvis greier man seg med omtrentlige verdier, men ved behov kan man bruke rekursjon og induksjon til å finne nøyaktige svar.
- Vi kan sortere elementene i en liste ved systematisk å bytte om på naboer som ligger i feil rekkefølge.
- La $S(n)$ være det maksimale antall slike bytter vi må foreta oss for å sortere en liste med n elementer.
- Vi ser at $S(1) = 0$
- Hvis listen kommer i fullstendig gal rekkefølge, må alle objektene i listen bytte plass med alle andre.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Antall bytter som da trenges for å sortere $n+1$ objekter er $S(n+1) = n + S(n)$, ettersom vi kan risikere at vi må flytte siste objekt i listen til førsteplass (n bytter) og deretter sortere resten av listen ($S(n)$ bytter.)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Antall bytter som da trenges for å sortere $n + 1$ objekter er $S(n + 1) = n + S(n)$, ettersom vi kan risikere at vi må flytte siste objekt i listen til førsteplass (n bytter) og deretter sortere resten av listen ($S(n)$ bytter.)
- Vi ser ved induksjon at $S(n) = \frac{(n-1)n}{2}$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Antall bytter som da trenges for å sortere $n + 1$ objekter er $S(n + 1) = n + S(n)$, ettersom vi kan risikere at vi må flytte siste objekt i listen til førsteplass (n bytter) og deretter sortere resten av listen ($S(n)$ bytter.)
- Vi ser ved induksjon at $S(n) = \frac{(n-1)n}{2}$.
- Beviset følger ved samme type utregning i induksjonsskrittet som for forrige eksempel, og vi tar det på tavlen (eller som øvelse for de som leser/repeterer denne teksten).

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Merk

Merk

- Det forrige eksemplet er ikke helt realistisk, enhver sorteringsalgoritme vil innebære at man foretar en rekke sammenlikninger og skifte av plasser.

Rekursjon og induksjon

Merk

- Det forrige eksemplet er ikke helt realistisk, enhver sorteringsalgoritme vil innebære at man foretar en rekke sammenlikninger og skifte av plasser.
- Hvis vi skal analysere hvor tidkrevende en algoritme kan være, må vi vite hvor mange regneskritt som kreves, og hvor lang tid hvert enkelt skritt tar.

Rekursjon og induksjon

Merk

- Det forrige eksemplet er ikke helt realistisk, enhver sorteringsalgoritme vil innebære at man foretar en rekke sammenlikninger og skifte av plasser.
- Hvis vi skal analysere hvor tidkrevende en algoritme kan være, må vi vite hvor mange regneskritt som kreves, og hvor lang tid hvert enkelt skritt tar.
- Induksjonsbevis kan inngå som en del av beviset for at en regneprosess kan utføres raskt, eventuelt for at den tar for lang tid.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Vi minner om definisjonen av binomialkoeffisienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!.}$$

Rekursjon og induksjon

Eksempel

- Vi minner om definisjonen av binomialkoeffisienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!.}$$

- Formelen

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

kan bekreftes ved enkel regning.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- På skolen lærer man at
$$\binom{n}{k}$$
uttrykker på hvor mange måter man kan velge ut k objekter fra en mengde med n objekter på, når $k \leqslant n$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- På skolen lærer man at
$$\binom{n}{k}$$
uttrykker på hvor mange måter man kan velge ut k objekter fra en mengde med n objekter på, når $k \leqslant n$.
- Det er ikke alltid så lett å få med seg begrunnelsen for dette.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- På skolen lærer man at
$$\binom{n}{k}$$
uttrykker på hvor mange måter man kan velge ut k objekter fra en mengde med n objekter på, når $k \leqslant n$.
- Det er ikke alltid så lett å få med seg begrunnelsen for dette.
- Et alternativ kan være å bruke induksjon.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi starter med tilfellet $n = 1$.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi starter med tilfellet $n = 1$.
- Da er $k = 1$, og det fins bare en måte å velge ut ett element fra en mengde på ett element. Binomialkoeffisienten er i dette tilfellet 1, så påstanden holder.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi starter med tilfellet $n = 1$.
- Da er $k = 1$, og det fins bare en måte å velge ut ett element fra en mengde på ett element. Binomialkoeffisienten er i dette tilfellet 1, så påstanden holder.
- Induksjonstarten er i boks.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Anta så at formelen holder for n og at vi skal finne ut av på hvor mange måter vi kan plukke k elementer ut av en mengde $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ på.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Anta så at formelen holder for n og at vi skal finne ut av på hvor mange måter vi kan plukke k elementer ut av en mengde $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ på.
- Hvis $k = n + 1$, fins det nøyaktig en måte, og

$$1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis $k < n + 1$, ser vi på to tilfeller:

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis $k < n + 1$, ser vi på to tilfeller:
  1. a_{n+1} er med i den mengden vi plukker ut.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis $k < n + 1$, ser vi på to tilfeller:
  1. a_{n+1} er med i den mengden vi plukker ut.
  2. a_{n+1} er ikke med i den mengden vi plukker ut.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis $k < n + 1$, ser vi på to tilfeller:
  1. a_{n+1} er med i den mengden vi plukker ut.
  2. a_{n+1} er ikke med i den mengden vi plukker ut.
- I det første tilfellet må vi plukke ut $k - 1$ elementer fra

$$\{a_1, \ldots, a_n\},$$

og det kan vi gjøre på

$$\binom{n}{k-1}$$

måter.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- I det andre tilfellet må vi plukke ut k elementer fra

$$\{a_1, \ldots, a_n\},$$

og det kan vi gjøre på

$$\binom{n}{k}$$

måter.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- I det andre tilfellet må vi plukke ut k elementer fra

$$\{a_1, \ldots, a_n\},$$

og det kan vi gjøre på

$$\binom{n}{k}$$

måter.

- Summen er da

$$\binom{n+1}{k}.$$

som angir det totale antall måter vi kan plukke ut k elementer fra en mengde med n elementer på.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonskrittet sier at hvis binomialkoeffisientene $\binom{n}{k}$ forteller oss, for alle $k \leqslant n$, hvor mange forskjellige delmengder med k elementer det fins av en mengde med n elementer, så vil koeffisientene $\binom{n+1}{k}$ fortelle oss det samme for mengder med $n+1$ elementer.

Rekursjon og induksjon

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonskrittet sier at hvis binomialkoeffisientene $\binom{n}{k}$ forteller oss, for alle $k \leqslant n$, hvor mange forskjellige delmengder med k elementer det fins av en mengde med n elementer, så vil koeffisientene $\binom{n+1}{k}$ fortelle oss det samme for mengder med $n+1$ elementer.
- Vi kan merke oss at for å vise induksjonskrittet for en k trenger vi induksjonsantagelsen både for k og for $k-1$.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

- Både rekursjon og induksjon er mer generelle fenomener enn det vi har gitt inntrykk av her.

Rekursjon og induksjon

- Både rekursjon og induksjon er mer generelle fenomener enn det vi har gitt inntrykk av her.
- Dette skal vi komme tilbake til, både ved å se på rekurrenslikninger og på rekursjon og induksjon over andre matematiske strukturer enn $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{N}_0$.

Rekursjon og induksjon

- Både rekursjon og induksjon er mer generelle fenomener enn det vi har gitt inntrykk av her.
- Dette skal vi komme tilbake til, både ved å se på rekurrenslikninger og på rekursjon og induksjon over andre matematiske strukturer enn $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{N}_0$.
- Først skal vi imidlertid se på en logikers forklaring på sammenhengen mellom induksjon og rekursjon:

Rekursjon og induksjon

- Både rekursjon og induksjon er mer generelle fenomener enn det vi har gitt inntrykk av her.
- Dette skal vi komme tilbake til, både ved å se på rekurrenslikninger og på rekursjon og induksjon over andre matematiske strukturer enn $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{N}_0$.
- Først skal vi imidlertid se på en logikers forklaring på sammenhengen mellom induksjon og rekursjon:
- Anta at vi i utgangspunktet ikke har lært om induksjonsbevis.

Rekursjon og induksjon

- Både rekursjon og induksjon er mer generelle fenomener enn det vi har gitt inntrykk av her.
- Dette skal vi komme tilbake til, både ved å se på rekurrenslikninger og på rekursjon og induksjon over andre matematiske strukturer enn $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{N}_0$.
- Først skal vi imidlertid se på en logikers forklaring på sammenhengen mellom induksjon og rekursjon:
- Anta at vi i utgangspunktet ikke har lært om induksjonsbevis.
- Anta videre at $P(k)$ er et predikat og at vi har bevis for

Rekursjon og induksjon

- Både rekursjon og induksjon er mer generelle fenomener enn det vi har gitt inntrykk av her.
- Dette skal vi komme tilbake til, både ved å se på rekurrenslikninger og på rekursjon og induksjon over andre matematiske strukturer enn $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{N}_0$.
- Først skal vi imidlertid se på en logikers forklaring på sammenhengen mellom induksjon og rekursjon:
- Anta at vi i utgangspunktet ikke har lært om induksjonsbevis.
- Anta videre at $P(k)$ er et predikat og at vi har bevis for
  1. Induksjonstarten $P(1)$

Rekursjon og induksjon

- Både rekursjon og induksjon er mer generelle fenomener enn det vi har gitt inntrykk av her.
- Dette skal vi komme tilbake til, både ved å se på rekurrenslikninger og på rekursjon og induksjon over andre matematiske strukturer enn $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{N}_0$.
- Først skal vi imidlertid se på en logikers forklaring på sammenhengen mellom induksjon og rekursjon:
- Anta at vi i utgangspunktet ikke har lært om induksjonsbevis.
- Anta videre at $P(k)$ er et predikat og at vi har bevis for
  1. Induksjonstarten $P(1)$
  2. Induksjonskrittet $P(k) \to P(k+1)$ hvor k er en variabel.

Rekursjon og induksjon

Rekursjon og induksjon

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved

Rekursjon og induksjon

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved
    1. La $B(1)$ være beviset vi har for $P(1)$.

Rekursjon og induksjon

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved
  1. La $B(1)$ være beviset vi har for $P(1)$.
  2. La $B(n+1)$ være bygget opp av

Rekursjon og induksjon

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved
  1. La $B(1)$ være beviset vi har for $P(1)$.
  2. La $B(n+1)$ være bygget opp av
     - $B(n)$(som er et bevis for $P(n)$),

Rekursjon og induksjon

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved
  1. La $B(1)$ være beviset vi har for $P(1)$.
  2. La $B(n+1)$ være bygget opp av
     - $B(n)$(som er et bevis for $P(n)$),
     - beviset vi får for $P(n) \to P(n+1)$ ved å sette inn n for k i beviset for induksjonskrittet,

Rekursjon og induksjon

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved
  1. La $B(1)$ være beviset vi har for $P(1)$.
  2. La $B(n+1)$ være bygget opp av
     - $B(n)$(som er et bevis for $P(n)$),
     - beviset vi får for $P(n) \to P(n+1)$ ved å sette inn n for k i beviset for induksjonskrittet,
     - og bruk av den utsagnslogiske regelen om at fra A og $A \to B$ kan vi slutte B.

Rekursjon og induksjon

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved
  1. La $B(1)$ være beviset vi har for $P(1)$.
  2. La $B(n+1)$ være bygget opp av
     - $B(n)$(som er et bevis for $P(n)$),
     - beviset vi får for $P(n) \to P(n+1)$ ved å sette inn n for k i beviset for induksjonskrittet,
     - og bruk av den utsagnslogiske regelen om at fra A og $A \to B$ kan vi slutte B.
  3. Da vil $B(n+1)$ være et bevis for $P(n+1)$.

Rekursjon og induksjon

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved
  1. La $B(1)$ være beviset vi har for $P(1)$.
  2. La $B(n+1)$ være bygget opp av
     - $B(n)$(som er et bevis for $P(n)$),
     - beviset vi får for $P(n) \to P(n+1)$ ved å sette inn n for k i beviset for induksjonskrittet,
     - og bruk av den utsagnslogiske regelen om at fra A og $A \to B$ kan vi slutte B.
  3. Da vil $B(n+1)$ være et bevis for $P(n+1)$.
- Når vi vet at vi kan konstruere enkeltbevis for hver $P(n)$, kan vi rasjonalisere virksomheten vår og si at vi har et bevis for $\forall n P(n)$.

Rekurrens

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
    - $F(1) = 1$
    - $F(2) = 1$

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$
  - $F(2) = 1$
  - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$
  - $F(2) = 1$
  - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$
  - $F(2) = 1$
  - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.

1. $F(1) = 1$

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$
  - $F(2) = 1$
  - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.

1. $F(1) = 1$
2. $F(2) = 1$

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
    - $F(1) = 1$
    - $F(2) = 1$
    - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.

1. $F(1) = 1$
2. $F(2) = 1$
3. $F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$
  - $F(2) = 1$
  - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.

1. $F(1) = 1$
2. $F(2) = 1$
3. $F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$
4. $F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$
  - $F(2) = 1$
  - $F(n + 2) = F(n + 1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.

1. $F(1) = 1$
2. $F(2) = 1$
3. $F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$
4. $F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$
5. $F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$
  - $F(2) = 1$
  - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.

1. $F(1) = 1$
2. $F(2) = 1$
3. $F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$
4. $F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$
5. $F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$

   $\ldots$

Rekurrens

- Det i nesten enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
  - $F(1) = 1$
  - $F(2) = 1$
  - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.

1. $F(1) = 1$
2. $F(2) = 1$
3. $F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$
4. $F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$
5. $F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$

   $\ldots$

- Vi definerer $F(n)$ direkte for de to minste verdiene av n og lar deretter verdien av $F(n)$ avhenge av verdien av F i de to foregående punktene.

Rekurrens

Rekurrens

- Da er det ingen grenser for hvor langt vi kan fortsette:

Rekurrens

- Da er det ingen grenser for hvor langt vi kan fortsette:
  $F(6) = 8$, $F(7) = 13$, $F(8) = 21$, $F(9) = 34$, $\cdots$.

Rekurrens

- Da er det ingen grenser for hvor langt vi kan fortsette:

  $F(6) = 8$, $F(7) = 13$, $F(8) = 21$, $F(9) = 34$, $\cdots$.
- Spørsmålet er om vi kan finne en eksplisitt formel for $F(n)$, og helst om vi kan basere dette på en generell forståelse.

Rekurrens

- Da er det ingen grenser for hvor langt vi kan fortsette:

  $F(6) = 8$, $F(7) = 13$, $F(8) = 21$, $F(9) = 34$, $\cdots$.
- Spørsmålet er om vi kan finne en eksplisitt formel for $F(n)$, og helst om vi kan basere dette på en generell forståelse.
- Dette skal vi komme tilbake til.

Rekurrens

- Da er det ingen grenser for hvor langt vi kan fortsette:

  $F(6) = 8$, $F(7) = 13$, $F(8) = 21$, $F(9) = 34$, $\cdots$.
- Spørsmålet er om vi kan finne en eksplisitt formel for $F(n)$, og helst om vi kan basere dette på en generell forståelse.
- Dette skal vi komme tilbake til.

  Vi skal se på et par andre eksempler først.

Rekurrens

Rekurrens

Eksempel

Rekurrens

Eksempel

- Likningen

Rekurrens

Eksempel

- Likningen

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

Rekurrens

Eksempel

- Likningen

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

  bestemmer ikke tallfølgen $F(1), F(2), F(3), \cdots$ fullstendig, men hver gang vi bestemmer oss for hva $F(1)$ og $F(2)$ skal være, blir følgen bestemt ved rekurrens.

Rekurrens

Eksempel

- Likningen

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

  bestemmer ikke tallfølgen $F(1), F(2), F(3), \cdots$ fullstendig, men hver gang vi bestemmer oss for hva $F(1)$ og $F(2)$ skal være, blir følgen bestemt ved rekurrens.
- En slik likning kaller vi en rekurrenslikning.

Rekurrens

Eksempel

- Likningen

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

  bestemmer ikke tallfølgen $F(1), F(2), F(3), \cdots$ fullstendig, men hver gang vi bestemmer oss for hva $F(1)$ og $F(2)$ skal være, blir følgen bestemt ved rekurrens.
- En slik likning kaller vi en rekurrenslikning.
- Ved direkte regning kan vi se at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = (-1)^n$ begge tilfredstiller likningen:

Rekurrens

Eksempel

- Likningen

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

  bestemmer ikke tallfølgen $F(1), F(2), F(3), \cdots$ fullstendig, men hver gang vi bestemmer oss for hva $F(1)$ og $F(2)$ skal være, blir følgen bestemt ved rekurrens.
- En slik likning kaller vi en rekurrenslikning.
- Ved direkte regning kan vi se at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = (-1)^n$ begge tilfredstiller likningen:
- $2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$

Rekurrens

Eksempel

- Likningen

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

  bestemmer ikke tallfølgen $F(1), F(2), F(3), \cdots$ fullstendig, men hver gang vi bestemmer oss for hva $F(1)$ og $F(2)$ skal være, blir følgen bestemt ved rekurrens.
- En slik likning kaller vi en rekurrenslikning.
- Ved direkte regning kan vi se at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = (-1)^n$ begge tilfredstiller likningen:
- $2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$
- $(-1)^{n+1} + 2 \cdot (-1)^n = (-1)^n(-1+2) = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^{n+2}$

Rekurrens

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis nå A og B er to reelle tall, ser vi at vi også har at

$$F_3(n) = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

  er en løsning.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis nå A og B er to reelle tall, ser vi at vi også har at

$$F_3(n) = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

  er en løsning.
- Er det nå noen grunn til å lete etter flere løsninger?

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis nå A og B er to reelle tall, ser vi at vi også har at

$$F_3(n) = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

  er en løsning.
- Er det nå noen grunn til å lete etter flere løsninger?
- Svaret er *NEI*, for vi vet at hvis vi bestemmer $F(1) = a$ og $F(2) = b$, har vi bestemt følgen fullstendig.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis nå A og B er to reelle tall, ser vi at vi også har at

$$F_3(n) = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

  er en løsning.
- Er det nå noen grunn til å lete etter flere løsninger?
- Svaret er *NEI*, for vi vet at hvis vi bestemmer $F(1) = a$ og $F(2) = b$, har vi bestemt følgen fullstendig.
- Likningene $a = A \cdot 2^1 + B \cdot (-1)^1$ og $b = A \cdot 2^2 + B \cdot (-1)^2$ vil bestemme A og B, slik at løsningen i et konkret tilfelle er en av de vi har sett på.

Rekurrens

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

- $$A = \frac{a+b}{6}$$

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

- $$A = \frac{a+b}{6}$$
- $$B = \frac{2b-a}{3}$$

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

- $$A = \frac{a+b}{6}$$
- $$B = \frac{2b-a}{3}$$

- Det neste spørsmålet er da selvfølgelig hvordan vi fant på å prøve potenser av 2 og -1.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

- $$A = \frac{a+b}{6}$$
- $$B = \frac{2b-a}{3}$$

- Det neste spørsmålet er da selvfølgelig hvordan vi fant på å prøve potenser av 2 og -1.
- Det skal vi komme tilbake til neste uke.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

- $$A = \frac{a+b}{6}$$
- $$B = \frac{2b-a}{3}$$

- Det neste spørsmålet er da selvfølgelig hvordan vi fant på å prøve potenser av 2 og -1.
- Det skal vi komme tilbake til neste uke.
- Vi minner om at neste uke er den siste forelesningsuken før Påske.