

MAT1030 – Diskret Matematikk

Forelesning 9: Mengdelære

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

16. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-16 14:08)



Kapittel 5: Mengdelære

Oppsummering

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi har dekket

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi har dekket
 - algoritmer og pseudokoder

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi har dekket
 - algoritmer og pseudokoder
 - tall og tallsystemer

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi har dekket
 - algoritmer og pseudokoder
 - tall og tallsystemer
 - litt om representasjon av data

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi har dekket
 - algoritmer og pseudokoder
 - tall og tallsystemer
 - litt om representasjon av data
 - utsagnslogikk

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi har dekket
 - algoritmer og pseudokoder
 - tall og tallsystemer
 - litt om representasjon av data
 - utsagnslogikk
 - predikatlogikk

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi har dekket
 - algoritmer og pseudokoder
 - tall og tallsystemer
 - litt om representasjon av data
 - utsagnslogikk
 - predikatlogikk
 - litt om hvordan bevis kan være strukturert.

Oppsummering

- Vi er nå ferdige med kapittel 1–4.
- Vi har dekket
 - algoritmer og pseudokoder
 - tall og tallsystemer
 - litt om representasjon av data
 - utsagnslogikk
 - predikatlogikk
 - litt om hvordan bevis kan være strukturert.
- Noen spørsmål før vi går over til kapittel 5?

Mengder

Mengder

- De fleste som tar MAT1030 har vært bort i mengder i en eller annen form tidligere.

Mengder

- De fleste som tar MAT1030 har vært bort i mengder i en eller annen form tidligere.
- I statistikk og sannsynlighetsteori på VGS behandler man **utfallsrom** og studerer matematiske sannsynligheter eller sannsynlighetsfordelinger basert på eksperimenter på slike utfallsrom.

Mengder

- De fleste som tar MAT1030 har vært bort i mengder i en eller annen form tidligere.
- I statistikk og sannsynlighetsteori på VGS behandler man **utfallsrom** og studerer matematiske sannsynligheter eller sannsynlighetsfordelinger basert på eksperimenter på slike utfallsrom.
- Man ser på delmengder av slike utfallsrom og eksempelvis Bayes setning, som omhandler både det vi vil kalle **komplement** og det vi vil kalle **snitt** (og med de betegnelsene).

Mengder

- De fleste som tar MAT1030 har vært bort i mengder i en eller annen form tidligere.
- I statistikk og sannsynlighetsteori på VGS behandler man **utfallsrom** og studerer matematiske sannsynligheter eller sannsynlighetsfordelinger basert på eksperimenter på slike utfallsrom.
- Man ser på delmengder av slike utfallsrom og eksempelvis Bayes setning, som omhandler både det vi vil kalle **komplement** og det vi vil kalle **snitt** (og med de betegnelsene).
- Mengdebegrepet brukes også i de innledende emnene på universitetet, eksempelvis i form av løsningsmengder for ulikheter.

Mengder

Mengder

- En **mengde** er en samling objekter hvor det er entydig bestemt hvilke objekter som er med i mengden eller ikke.

Mengder

- En **mengde** er en samling objekter hvor det er entydig bestemt hvilke objekter som er med i mengden eller ikke.
- Bruken av mengder gjennomsyrrer matematikk og andre teoretiske fag.

Mengder

- En **mengde** er en samling objekter hvor det er entydig bestemt hvilke objekter som er med i mengden eller ikke.
- Bruken av mengder gjennomsyrrer matematikk og andre teoretiske fag.
- Vi skal lære å bruke mengder slik at vi kan uttrykke oss presist om konstruksjoner og begreper av interesse i informatikk i en vid forstand.

Mengder

- En **mengde** er en samling objekter hvor det er entydig bestemt hvilke objekter som er med i mengden eller ikke.
- Bruken av mengder gjennomsyrrer matematikk og andre teoretiske fag.
- Vi skal lære å bruke mengder slik at vi kan uttrykke oss presist om konstruksjoner og begreper av interesse i informatikk i en vid forstand.
- Mengdelære brukes på mange måter som **matematikkens grunnlag**,

Mengder

- En **mengde** er en samling objekter hvor det er entydig bestemt hvilke objekter som er med i mengden eller ikke.
- Bruken av mengder gjennomsyrrer matematikk og andre teoretiske fag.
- Vi skal lære å bruke mengder slik at vi kan uttrykke oss presist om konstruksjoner og begreper av interesse i informatikk i en vid forstand.
- Mengdelære brukes på mange måter som **matematikkens grunnlag**, noe vi ikke skal legge så stor vekt på.

Mengder

Mengder

Vi bruker **klammeparenteser** { og } for å beskrive mengder.

Mengder

Vi bruker **klammeparenteser** { og } for å beskrive mengder.

Vi skal illustrere bruken ved eksempler.

Mengder

Vi bruker **klammeparenteser** { og } for å beskrive mengder.

Vi skal illustrere bruken ved eksempler.

Eksempel

Mengder

Vi bruker **klammeparenteser** { og } for å beskrive mengder.

Vi skal illustrere bruken ved eksempler.

Eksempel

- $\{0, 1\}$ er mengden av digitale verdier en bit kan ha.

Mengder

Vi bruker **klammeparenteser** { og } for å beskrive mengder.

Vi skal illustrere bruken ved eksempler.

Eksempel

- $\{0, 1\}$ er mengden av digitale verdier en bit kan ha.
- $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ er mengden av sannhetsverdier.

Mengder

Vi bruker **klammeparenteser** { og } for å beskrive mengder.

Vi skal illustrere bruken ved eksempler.

Eksempel

- $\{0, 1\}$ er mengden av digitale verdier en bit kan ha.
- $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ er mengden av sannhetsverdier.
- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ er mengden av de 10 minste primtallene.

Mengder

Vi bruker **klammeparenteser** { og } for å beskrive mengder.

Vi skal illustrere bruken ved eksempler.

Eksempel

- $\{0, 1\}$ er mengden av digitale verdier en bit kan ha.
- $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ er mengden av sannhetsverdier.
- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ er mengden av de 10 minste primtallene.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ er mengden av **naturlige tall**.

Mengder

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.
- Vi sier at vi har gitt mengden på **listeform**.

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.
- Vi sier at vi har gitt mengden på **listeform**.
- I en viss forstand har vi beskrevet \mathbb{N} ved hjelp av en liste. I dette tilfellet er listen uendelig lang, og vi har brukt prikkene \dots for å antyde at opplistingen fortsetter.

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.
- Vi sier at vi har gitt mengden på **listeform**.
- I en viss forstand har vi beskrevet \mathbb{N} ved hjelp av en liste. I dette tilfellet er listen uendelig lang, og vi har brukt prikkene \dots for å antyde at opplistingen fortsetter.
- Denne mengden er også gitt på **listeform** (Læreboka: **Enumerated form**).

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.
- Vi sier at vi har gitt mengden på **listeform**.
- I en viss forstand har vi beskrevet \mathbb{N} ved hjelp av en liste. I dette tilfellet er listen uendelig lang, og vi har brukt prikkene \dots for å antyde at opplistingen fortsetter.
- Denne mengden er også gitt på **listeform** (Læreboka: **Enumerated form**).
- Bruker vi listeform med prikker eller tilsvarende, må vi være sikre på at leseren vil oppfatte prikkene på samme måte som forfatteren.

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.
- Vi sier at vi har gitt mengden på **listeform**.
- I en viss forstand har vi beskrevet \mathbb{N} ved hjelp av en liste. I dette tilfellet er listen uendelig lang, og vi har brukt prikkene \dots for å antyde at opplistingen fortsetter.
- Denne mengden er også gitt på **listeform** (Læreboka: **Enumerated form**).
- Bruker vi listeform med prikker eller tilsvarende, må vi være sikre på at leseren vil oppfatte prikkene på samme måte som forfatteren.
- Hvordan ser mengden $\{1, 5, 15, 34, 65, \dots\}$ ut?

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.
- Vi sier at vi har gitt mengden på **listeform**.
- I en viss forstand har vi beskrevet \mathbb{N} ved hjelp av en liste. I dette tilfellet er listen uendelig lang, og vi har brukt prikkene \dots for å antyde at opplistingen fortsetter.
- Denne mengden er også gitt på **listeform** (Læreboka: **Enumerated form**).
- Bruker vi listeform med prikker eller tilsvarende, må vi være sikre på at leseren vil oppfatte prikkene på samme måte som forfatteren.
- Hvordan ser mengden $\{1, 5, 15, 34, 65, \dots\}$ ut?
 - Hjelper det å få vite at neste tall er 111?

Mengder

- I de tre første eksemplene har vi listet opp mengdens **elementer**.
- Mengdene er endelige og i disse tilfellene så små at vi kan beskrive mengden ved hjelp av en liste med klammeparenteser rundt.
- Vi sier at vi har gitt mengden på **listeform**.
- I en viss forstand har vi beskrevet \mathbb{N} ved hjelp av en liste. I dette tilfellet er listen uendelig lang, og vi har brukt prikkene \dots for å antyde at opplistingen fortsetter.
- Denne mengden er også gitt på **listeform** (Læreboka: **Enumerated form**).
- Bruker vi listeform med prikker eller tilsvarende, må vi være sikre på at leseren vil oppfatte prikkene på samme måte som forfatteren.
- Hvordan ser mengden $\{1, 5, 15, 34, 65, \dots\}$ ut?
 - Hjelper det å få vite at neste tall er 111?
 - Kunne vi startet med $\{0, 1, \dots\}$ og forøvrig fått den samme tallmengden basert på den samme regelen?

Mengder

Mengder

- Vi trenger et eget symbol for å uttrykke at et objekt er et element i en mengde.

Mengder

- Vi trenger et eget symbol for å uttrykke at et objekt er et element i en mengde.

Definisjon

Mengder

- Vi trenger et eget symbol for å uttrykke at et objekt er et element i en mengde.

Definisjon

- a) Vi skriver $a \in A$ for å uttrykke at a er et element i mengden A .

Mengder

- Vi trenger et eget symbol for å uttrykke at et objekt er et element i en mengde.

Definisjon

- a) Vi skriver $a \in A$ for å uttrykke at a er et element i mengden A .
- b) Vi skriver $a \notin A$ for å uttrykke at a *ikke* er et element i A .

Mengder

- Vi trenger et eget symbol for å uttrykke at et objekt er et element i en mengde.

Definisjon

- a) Vi skriver $a \in A$ for å uttrykke at a er et element i mengden A .
- b) Vi skriver $a \notin A$ for å uttrykke at a *ikke* er et element i A .

- Vi kunne ha skrevet $\neg(a \in A)$ i stedetfor.

Mengder

- Vi trenger et eget symbol for å uttrykke at et objekt er et element i en mengde.

Definisjon

- a) Vi skriver $a \in A$ for å uttrykke at a er et element i mengden A .
 - b) Vi skriver $a \notin A$ for å uttrykke at a *ikke* er et element i A .
-
- Vi kunne ha skrevet $\neg(a \in A)$ i stedetfor.
 - Det er ikke uvanlig å bruke $/$ som nektingssymbol, som i $3 \not< 2$ og $4 \neq 3$.

Mengder

Mengder

- Hvis vi skal beskrive noe mer kompliserte mengder, må vi bruke et litt annet format enn listeform, kalt **predikatform** i læreboka.

Mengder

- Hvis vi skal beskrive noe mer kompliserte mengder, må vi bruke et litt annet format enn listeform, kalt **predikatform** i læreboka.
- Dette illustreres også best ved noen eksempler.

Mengder

- Hvis vi skal beskrive noe mer kompliserte mengder, må vi bruke et litt annet format enn listeform, kalt **predikatform** i læreboka.
- Dette illustreres også best ved noen eksempler.

Eksempel

Mengder

- Hvis vi skal beskrive noe mer kompliserte mengder, må vi bruke et litt annet format enn listeform, kalt **predikatform** i læreboka.
- Dette illustreres også best ved noen eksempler.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ kan deles på } 5\}$

Mengder

- Hvis vi skal beskrive noe mer kompliserte mengder, må vi bruke et litt annet format enn listeform, kalt **predikatform** i læreboka.
- Dette illustreres også best ved noen eksempler.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ kan deles på } 5\}$
Mengden av n i \mathbb{N} slik at n kan deles på 5.

Mengder

- Hvis vi skal beskrive noe mer kompliserte mengder, må vi bruke et litt annet format enn listeform, kalt **predikatform** i læreboka.
- Dette illustreres også best ved noen eksempler.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ kan deles på } 5\}$
Mengden av n i \mathbb{N} slik at n kan deles på 5.
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ er et primtall}\}$

Mengder

- Hvis vi skal beskrive noe mer kompliserte mengder, må vi bruke et litt annet format enn listeform, kalt **predikatform** i læreboka.
- Dette illustreres også best ved noen eksempler.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ kan deles på } 5\}$
Mengden av n i \mathbb{N} slik at n kan deles på 5.
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ er et primtall}\}$
Mengden av n i \mathbb{N} slik at n er et primtall.

Mengder

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Eksempel

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 5k)\}$

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 5k)\}$

Mengden av n i \mathbb{N} slik at det fins en k i \mathbb{N} slik at $n = 5k$.

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 5k)\}$

Mengden av n i \mathbb{N} slik at det fins en k i \mathbb{N} slik at $n = 5k$.

- $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \forall m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}(n = km \rightarrow k = 1 \vee m = 1)\}$

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 5k)\}$

Mengden av n i \mathbb{N} slik at det fins en k i \mathbb{N} slik at $n = 5k$.

- $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \forall m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}(n = km \rightarrow k = 1 \vee m = 1)\}$

Mengden av de n i \mathbb{N} som er slik at n er større eller lik 2, og slik at for alle m og k i \mathbb{N} har vi at hvis $n = km$ så er $k = 1$ eller $m = 1$.

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 5k)\}$

Mengden av n i \mathbb{N} slik at det fins en k i \mathbb{N} slik at $n = 5k$.

- $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \forall m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}(n = km \rightarrow k = 1 \vee m = 1)\}$

Mengden av de n i \mathbb{N} som er slik at n er større eller lik 2, og slik at for alle m og k i \mathbb{N} har vi at hvis $n = km$ så er $k = 1$ eller $m = 1$.

Vi ser at den formelle definisjonen faktisk er lettere å lese,

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 5k)\}$

Mengden av n i \mathbb{N} slik at det fins en k i \mathbb{N} slik at $n = 5k$.

- $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \forall m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}(n = km \rightarrow k = 1 \vee m = 1)\}$

Mengden av de n i \mathbb{N} som er slik at n er større eller lik 2, og slik at for alle m og k i \mathbb{N} har vi at hvis $n = km$ så er $k = 1$ eller $m = 1$.

Vi ser at den formelle definisjonen faktisk er lettere å lese, mens definisjonen fra forrige side vel egentlig var den som var enklest å oppfatte.

Mengder

Vi kan uttrykke dette mer formelt som følger.

Da blir det vanskeligere å uttrykke definisjonen med ord.

Eksempel

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}(n = 5k)\}$

Mengden av n i \mathbb{N} slik at det fins en k i \mathbb{N} slik at $n = 5k$.

- $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge \forall m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}(n = km \rightarrow k = 1 \vee m = 1)\}$

Mengden av de n i \mathbb{N} som er slik at n er større eller lik 2, og slik at for alle m og k i \mathbb{N} har vi at hvis $n = km$ så er $k = 1$ eller $m = 1$.

Vi ser at den formelle definisjonen faktisk er lettere å lese, mens definisjonen fra forrige side vel egentlig var den som var enklest å oppfatte.

Hvordan vi formulerer definisjonen av en mengde avhenger av hva vi vil kommunisere.

Mengder

Mengder

- Vi kaller ofte bruken

$\{\cdot : \dots\}$

av parenteser for **mengdebyggeren**.

Mengder

- Vi kaller ofte bruken

$$\{ \cdot : \dots \}$$

av parenteser for **mengdebyggeren**.

- Læreboka bruker kolon, :, i mengdebyggeren.

Mengder

- Vi kaller ofte bruken

$$\{\cdot : \dots\}$$

av parenteser for **mengdebyggeren**.

- Læreboka bruker kolon, :, i mengdebyggeren.
- Det er like vanlig, om ikke vanligere, å bruke en vertikal strek, | i stedenfor.

Mengder

- Vi kaller ofte bruken

$$\{\cdot : \dots\}$$

av parenteser for mengdebyggeren.

- Læreboka bruker kolon, :, i mengdebyggeren.
- Det er like vanlig, om ikke vanligere, å bruke en vertikal strek, | i stedenfor.
- Da ser mengdebyggeren ut som

$$\{\cdot | \dots\}.$$

Mengder

- Vi kaller ofte bruken

$$\{\cdot : \dots\}$$

av parenteser for mengdebyggeren.

- Læreboka bruker kolon, :, i mengdebyggeren.
- Det er like vanlig, om ikke vanligere, å bruke en vertikal strek, | i stedenfor.
- Da ser mengdebyggeren ut som

$$\{\cdot | \dots\}.$$

- Det er mulig at foreleser, av gammel vane, kommer til å bruke | i stedenfor : noen ganger.

Mengder

Mengder

- Noen mengder vil vi referere til så ofte at vi bruker egne symboler for dem.

Mengder

- Noen mengder vil vi referere til så ofte at vi bruker egne symboler for dem.
- Vi har allerede sett at vi bruker \mathbb{N} for mengden av naturlige tall.

Mengder

- Noen mengder vil vi referere til så ofte at vi bruker egne symboler for dem.
- Vi har allerede sett at vi bruker \mathbb{N} for mengden av naturlige tall.
- Vi lar $\mathbb{J} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ være mengden av **hele tall**.

Mengder

- Noen mengder vil vi referere til så ofte at vi bruker egne symboler for dem.
- Vi har allerede sett at vi bruker \mathbb{N} for mengden av naturlige tall.
- Vi lar $\mathbb{J} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ være mengden av **hele tall**.

Her følger vi boka, men internasjonalt (og i Norge) er det mer vanlig å bruke \mathbb{Z} for denne mengden.

Mengder

- Noen mengder vil vi referere til så ofte at vi bruker egne symboler for dem.
- Vi har allerede sett at vi bruker \mathbb{N} for mengden av naturlige tall.
- Vi lar $\mathbb{J} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ være mengden av **hele tall**.

Her følger vi boka, men internasjonalt (og i Norge) er det mer vanlig å bruke \mathbb{Z} for denne mengden.

- Vi lar \mathbb{R} stå for mengden av alle reelle tall.

Mengder

- Noen mengder vil vi referere til så ofte at vi bruker egne symboler for dem.
- Vi har allerede sett at vi bruker \mathbb{N} for mengden av naturlige tall.
- Vi lar $\mathbb{J} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ være mengden av **hele tall**.

Her følger vi boka, men internasjonalt (og i Norge) er det mer vanlig å bruke \mathbb{Z} for denne mengden.

- Vi lar \mathbb{R} stå for mengden av alle reelle tall.

Det er så mange reelle tall at vi vanskelig kan liste dem opp, ikke engang ved hjelp av \dots .

Mengder

- Noen mengder vil vi referere til så ofte at vi bruker egne symboler for dem.
- Vi har allerede sett at vi bruker \mathbb{N} for mengden av naturlige tall.
- Vi lar $\mathbb{J} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ være mengden av **hele tall**.

Her følger vi boka, men internasjonalt (og i Norge) er det mer vanlig å bruke \mathbb{Z} for denne mengden.

- Vi lar \mathbb{R} stå for mengden av alle reelle tall.
Det er så mange reelle tall at vi vanskelig kan liste dem opp, ikke engang ved hjelp av \dots .
- Vi lar \mathbb{Q} betegne mengden av rasjonale tall.

Mengder

Mengder

- Det er mulig å definere \mathbb{Q} fra de andre mengdene.

Mengder

- Det er mulig å definere \mathbb{Q} fra de andre mengdene.

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{J} \exists q \in \mathbb{N} (x = \frac{p}{q})\}.$$

Mengder

- Det er mulig å definere \mathbb{Q} fra de andre mengdene.

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{J} \exists q \in \mathbb{N} (x = \frac{p}{q})\}.$$

- Det er også mulig å skrive \mathbb{Q} på listeform:

Mengder

- Det er mulig å definere \mathbb{Q} fra de andre mengdene.

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{J} \exists q \in \mathbb{N} (x = \frac{p}{q})\}.$$

- Det er også mulig å skrive \mathbb{Q} på listeform:

$$\mathbb{Q} = \{0, -1, 1, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, -3, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \dots\}$$

Mengder

- Det er mulig å definere \mathbb{Q} fra de andre mengdene.

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{J} \exists q \in \mathbb{N} (x = \frac{p}{q})\}.$$

- Det er også mulig å skrive \mathbb{Q} på listeform:

$$\mathbb{Q} = \{0, -1, 1, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, -3, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \dots\}$$

- I en viss forstand er det umulig å definere \mathbb{N} utfra \mathbb{R} alene.

Mengder

- Det er mulig å definere \mathbb{Q} fra de andre mengdene.

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{J} \exists q \in \mathbb{N} (x = \frac{p}{q})\}.$$

- Det er også mulig å skrive \mathbb{Q} på listeform:

$$\mathbb{Q} = \{0, -1, 1, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, -3, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \dots\}$$

- I en viss forstand er det umulig å definere \mathbb{N} utfra \mathbb{R} alene.
 - Den forstanden faller langt utenfor pensum i MAT1030.

Mengder

- Det er mulig å definere \mathbb{Q} fra de andre mengdene.

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{J} \exists q \in \mathbb{N} (x = \frac{p}{q})\}.$$

- Det er også mulig å skrive \mathbb{Q} på listeform:

$$\mathbb{Q} = \{0, -1, 1, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, -3, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \dots\}$$

- I en viss forstand er det umulig å definere \mathbb{N} utfra \mathbb{R} alene.
 - Den forstanden faller langt utenfor pensum i MAT1030.
- Vi har allerede truffet på endel mengder i dette emnet, uten å legge vekt på at de er mengder.

Mengder

Mengder

Eksempel

Eksempel

- La VAL_k være mengden av fordelinger av sannhetsverdier **T** og **F** på k utsagnsvariable p_1, \dots, p_k .

Mengder

Eksempel

- La VAL_k være mengden av fordelinger av sannhetsverdier **T** og **F** på k utsagnsvariable p_1, \dots, p_k .
- La \mathcal{V} være en uendelig mengde $\{p_1, p_2, \dots\}$ av utsagnsvariable.

Mengder

Eksempel

- La VAL_k være mengden av fordelinger av sannhetsverdier \mathbf{T} og \mathbf{F} på k utsagnsvariable p_1, \dots, p_k .
- La var være en uendelig mengde $\{p_1, p_2, \dots\}$ av utsagnsvariable. Vi kan arbeide med denne mengden uten å vite nøyaktig hva disse variablene er, det holder at vi har **navn** for dem.

Mengder

Eksempel

- La VAL_k være mengden av fordelinger av sannhetsverdier \mathbf{T} og \mathbf{F} på k utsagnsvariable p_1, \dots, p_k .
- La var være en uendelig mengde $\{p_1, p_2, \dots\}$ av utsagnsvariable. Vi kan arbeide med denne mengden uten å vite nøyaktig hva disse variablene er, det holder at vi har **navn** for dem.
- La $REP_{\mathbb{R}}$ være mengden av digitale representasjoner av reelle tall, og la $REP_{\mathbb{J}}$ være mengden av **digitale** representasjoner av hele tall

Mengder

Eksempel

- La VAL_k være mengden av fordelinger av sannhetsverdier **T** og **F** på k utsagnsvariable p_1, \dots, p_k .
- La var være en uendelig mengde $\{p_1, p_2, \dots\}$ av utsagnsvariable. Vi kan arbeide med denne mengden uten å vite nøyaktig hva disse variablene er, det holder at vi har **navn** for dem.
- La $REP_{\mathbb{R}}$ være mengden av digitale representasjoner av reelle tall, og la $REP_{\mathbb{J}}$ være mengden av **digitale** representasjoner av hele tall som ikke er den samme mengden som mengden av **binære** representasjoner av hele tall.

Mengder

Eksempel

- La VAL_k være mengden av fordelinger av sannhetsverdier \mathbf{T} og \mathbf{F} på k utsagnsvariable p_1, \dots, p_k .
- La var være en uendelig mengde $\{p_1, p_2, \dots\}$ av utsagnsvariable. Vi kan arbeide med denne mengden uten å vite nøyaktig hva disse variablene er, det holder at vi har **navn** for dem.
- La $REP_{\mathbb{R}}$ være mengden av digitale representasjoner av reelle tall, og la $REP_{\mathbb{J}}$ være mengden av **digitale** representasjoner av hele tall som ikke er den samme mengden som mengden av **binære** representasjoner av hele tall.
- Da vi snakket om hvordan vi skulle “forstå” kvantorer $\exists x$ og $\forall y$, sa vi at vi måtte presisere hvilke verdier x og y kan ta.

Mengder

Eksempel

- La VAL_k være mengden av fordelinger av sannhetsverdier \mathbf{T} og \mathbf{F} på k utsagnsvariable p_1, \dots, p_k .
- La var være en uendelig mengde $\{p_1, p_2, \dots\}$ av utsagnsvariable. Vi kan arbeide med denne mengden uten å vite nøyaktig hva disse variablene er, det holder at vi har **navn** for dem.
- La $REP_{\mathbb{R}}$ være mengden av digitale representasjoner av reelle tall, og la $REP_{\mathbb{J}}$ være mengden av **digitale** representasjoner av hele tall som ikke er den samme mengden som mengden av **binære** representasjoner av hele tall.
- Da vi snakket om hvordan vi skulle “forstå” kvantorer $\exists x$ og $\forall y$, sa vi at vi måtte presisere hvilke verdier x og y kan ta. Dette kan vi gjøre mer presist ved å snakke om **variasjonsmengden** eller **tolkningsområdet** til den enkelte variable som en mengde.

Mengder

Mengder

- Senere skal vi se på [datastrukturer](#) som mengder.

Mengder

- Senere skal vi se på **datastrukturer** som mengder.
- En datastruktur vil bestå av de objektene en variabel i et program kan ta som verdi.

Mengder

- Senere skal vi se på **datastrukturer** som mengder.
- En datastruktur vil bestå av de objektene en variabel i et program kan ta som verdi.
- Vi har tidligere nevnt at vi ofte må deklarerer **typen** til en variabel.

Mengder

- Senere skal vi se på **datastrukturer** som mengder.
- En datastruktur vil bestå av de objektene en variabel i et program kan ta som verdi.
- Vi har tidligere nevnt at vi ofte må deklarerer **typen** til en variabel.
- Dette betyr at vi må avgrense den delen av datastrukturen som den aktuelle variabelen kan hente sine verdier fra.

Mengder

- Senere skal vi se på **datastrukturer** som mengder.
- En datastruktur vil bestå av de objektene en variabel i et program kan ta som verdi.
- Vi har tidligere nevnt at vi ofte må deklare **typen** til en variabel.
- Dette betyr at vi må avgrense den delen av datastrukturen som den aktuelle variabelen kan hente sine verdier fra.
- For å kunne beskrive datastrukturer, datatyper og for å kunne diskutere hvordan, og i hvilket omfang, objektene i slike strukturer kan representeres som digitalisert informasjon, trenger vi et grunnlag i mengdelære.

Mengder

- Senere skal vi se på **datastrukturer** som mengder.
- En datastruktur vil bestå av de objektene en variabel i et program kan ta som verdi.
- Vi har tidligere nevnt at vi ofte må deklare **typen** til en variabel.
- Dette betyr at vi må avgrense den delen av datastrukturen som den aktuelle variabelen kan hente sine verdier fra.
- For å kunne beskrive datastrukturer, datatyper og for å kunne diskutere hvordan, og i hvilket omfang, objektene i slike strukturer kan representeres som digitalisert informasjon, trenger vi et grunnlag i mengdelære.
- Det er dette grunnlaget vi skal få når vi gjennomgår stoffet i Kapittel 5.

Mengder

Mengder

- Vi skal ikke kaste oss inn i den filosofiske diskusjonen om hva en **mengde** er i noen større grad enn i diskusjonen om hva et tall er for noe.

Mengder

- Vi skal ikke kaste oss inn i den filosofiske diskusjonen om hva en **mengde** er i noen større grad enn i diskusjonen om hva et tall er for noe.
- Det viktigste for oss er å forstå hvordan vi bruker mengder til å uttrykke oss presist.

Mengder

- Vi skal ikke kaste oss inn i den filosofiske diskusjonen om hva en **mengde** er i noen større grad enn i diskusjonen om hva et tall er for noe.
- Det viktigste for oss er å forstå hvordan vi bruker mengder til å uttrykke oss presist.
- Hvis man noen gang har tenkt til å diskutere teoriproblemer med noen andre, er det viktig at man har den samme forståelsen.

Mengder

- Vi skal ikke kaste oss inn i den filosofiske diskusjonen om hva en **mengde** er i noen større grad enn i diskusjonen om hva et tall er for noe.
- Det viktigste for oss er å forstå hvordan vi bruker mengder til å uttrykke oss presist.
- Hvis man noen gang har tenkt til å diskutere teoriproblemer med noen andre, er det viktig at man har den samme forståelsen.
- En viktig del av denne forståelsen er å vite når to mengder er like.

Mengder

Mengder

Definisjon

To mengder A og B er **like** hvis de har nøyaktig de samme elementene.

Mengder

Definisjon

To mengder A og B er **like** hvis de har nøyaktig de samme elementene.

- Det betyr at mengden er fullstendig bestemt av sine elementer, og det betyr ikke noe hvordan vi beskriver den.

Mengder

Eksempel

Eksempel

- $\{2, 3, 4\} = \{3, 4, 2\} = \{2, 2^2, 3\} = \{1 + 1, 2, 2 + 1, 3, 3 + 1, 2 + 2, 4\}$

Eksempel

- $\{2, 3, 4\} = \{3, 4, 2\} = \{2, 2^2, 3\} = \{1 + 1, 2, 2 + 1, 3, 3 + 1, 2 + 2, 4\}$
- $\{3, 4, 7\} = \{\text{III}, \text{IV}, \text{VII}\}$ så lenge det er klart at vi bruker arabiske og romerske måter å uttrykke tall på,

Eksempel

- $\{2, 3, 4\} = \{3, 4, 2\} = \{2, 2^2, 3\} = \{1 + 1, 2, 2 + 1, 3, 3 + 1, 2 + 2, 4\}$
- $\{3, 4, 7\} = \{\text{III}, \text{IV}, \text{VII}\}$ så lenge det er klart at vi bruker arabiske og romerske måter å uttrykke tall på, mens hvis vi snakker om de konkrete symbolsekvensene er mengdene forskjellige.

Mengder

Eksempel

- $\{2, 3, 4\} = \{3, 4, 2\} = \{2, 2^2, 3\} = \{1 + 1, 2, 2 + 1, 3, 3 + 1, 2 + 2, 4\}$
- $\{3, 4, 7\} = \{\text{III}, \text{IV}, \text{VII}\}$ så lenge det er klart at vi bruker arabiske og romerske måter å uttrykke tall på, mens hvis vi snakker om de konkrete symbolsekvensene er mengdene forskjellige.

-

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 = 25\} =$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{3x}{5}\right)^2 + \left(\frac{4y}{5}\right)^2 = 1\}.$$

Mengder

Mengder

Eksempel (Tre “dumme” oppgaver)

Mengder

Eksempel (Tre “dumme” oppgaver)

- Finn

$$\{x \in \mathbb{R} : x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 0\}$$

Mengder

Eksempel (Tre “dumme” oppgaver)

- Finn

$$\{x \in \mathbb{R} : x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 0\}$$

- Bestem mengden av sannhetsverdifordelinger som gjør

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

sann.

Mengder

Eksempel (Tre “dumme” oppgaver)

- Finn

$$\{x \in \mathbb{R} : x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 0\}$$

- Bestem mengden av sannhetsverdifordelinger som gjør

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

sann.

- Finn mengden av flytende-punkt representasjoner av det reelle tallet 0.

Mengder

Eksempel (Tre “dumme” oppgaver)

- Finn

$$\{x \in \mathbb{R} : x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 0\}$$

- Bestem mengden av sannhetsverdifordelinger som gjør

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

sann.

- Finn mengden av flytende-punkt representasjoner av det reelle tallet 0.

- Felles for alle disse tre oppgavene er at mengdene ikke har noen elementer.

Mengder

Eksempel (Tre “dumme” oppgaver)

- Finn

$$\{x \in \mathbb{R} : x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 0\}$$

- Bestem mengden av sannhetsverdifordelinger som gjør

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

sann.

- Finn mengden av flytende-punkt representasjoner av det reelle tallet 0.
- Felles for alle disse tre oppgavene er at mengdene ikke har noen elementer.
- Alle løsningsmengdene har nøyaktig de samme elementene, nemlig ingen, og er derfor like.

Mengder

Mengder

Definisjon

Vi lar \emptyset betegne **den tomme mengden**, det vil si mengden som ikke har noen elementer.

Definisjon

Vi lar \emptyset betegne **den tomme mengden**, det vil si mengden som ikke har noen elementer.

- Symbolet \emptyset er internasjonalt gjennomført, og man vil ikke finne det forklart andre steder enn i innføringstekster i mengdelære.

Definisjon

Vi lar \emptyset betegne **den tomme mengden**, det vil si mengden som ikke har noen elementer.

- Symbolet \emptyset er internasjonalt gjennomført, og man vil ikke finne det forklart andre steder enn i innføringstekster i mengdelære.
- Det er fremkommet ved en “null” med en strek over, og må ikke forveksles med noen bokstav i noe alfabet.

Definisjon

Vi lar \emptyset betegne **den tomme mengden**, det vil si mengden som ikke har noen elementer.

- Symbolet \emptyset er internasjonalt gjennomført, og man vil ikke finne det forklart andre steder enn i innføringstekster i mengdelære.
- Det er fremkommet ved en “null” med en strek over, og må ikke forveksles med noen bokstav i noe alfabet.
- Vi har at $\emptyset \neq \{\emptyset\}$; den første mengden har ingen elementer mens den andre har ett element, nemlig \emptyset selv.

Mengder

Mengder

- Vi har tidligere sagt at når vi bruker en variabel i en programmeringssammenheng, må vi deklarere *typen* til variabelen.

Mengder

- Vi har tidligere sagt at når vi bruker en variabel i en programmeringssammenheng, må vi deklare *typen* til variabelen. (Ikke alltid sant; det kan avhenge av programmeringsspråket, men for mange ikke-spesialiserte språk er det tilfelle.)

Mengder

- Vi har tidligere sagt at når vi bruker en variabel i en programmeringssammenheng, må vi deklarere *typen* til variabelen. (Ikke alltid sant; det kan avhenge av programmeringsspråket, men for mange ikke-spesialiserte språk er det tilfelle.)
- Alternativt arbeider vi med en *datastruktur* hvor vi henter alle variabelverdier fra.

Mengder

- Vi har tidligere sagt at når vi bruker en variabel i en programmeringssammenheng, må vi deklare *typen* til variabelen. (Ikke alltid sant; det kan avhenge av programmeringsspråket, men for mange ikke-spesialiserte språk er det tilfelle.)
- Alternativt arbeider vi med en *datastruktur* hvor vi henter alle variabelverdier fra.
- Vi har ofte definert mengder som $\{n \in \mathbb{N} : \dots\}$ eller $\{x \in \mathbb{R} : \dots\}$. I slike tilfeller er det ofte klart fra sammenhengen hvilke mengder n eller x skal hentes fra, og det kan være brysomt å måtte presisere det hver gang.

Mengder

- Vi har tidligere sagt at når vi bruker en variabel i en programmeringssammenheng, må vi deklare *typen* til variabelen. (Ikke alltid sant; det kan avhenge av programmeringsspråket, men for mange ikke-spesialiserte språk er det tilfelle.)
- Alternativt arbeider vi med en *datastruktur* hvor vi henter alle variabelverdier fra.
- Vi har ofte definert mengder som $\{n \in \mathbb{N} : \dots\}$ eller $\{x \in \mathbb{R} : \dots\}$. I slike tilfeller er det ofte klart fra sammenhengen hvilke mengder n eller x skal hentes fra, og det kan være brysomt å måtte presisere det hver gang.
- Hvis A er en mengde, og vi vil se på mengden av objekter som ikke er med i A , vil vi normalt ønske å avgrense oss til de objektene som er av interesse i den aktuelle sammenhengen.

Mengder

- Vi har tidligere sagt at når vi bruker en variabel i en programmeringssammenheng, må vi deklare *typen* til variabelen. (Ikke alltid sant; det kan avhenge av programmeringsspråket, men for mange ikke-spesialiserte språk er det tilfelle.)
- Alternativt arbeider vi med en *datastruktur* hvor vi henter alle variabelverdier fra.
- Vi har ofte definert mengder som $\{n \in \mathbb{N} : \dots\}$ eller $\{x \in \mathbb{R} : \dots\}$. I slike tilfeller er det ofte klart fra sammenhengen hvilke mengder n eller x skal hentes fra, og det kan være brysomt å måtte presisere det hver gang.
- Hvis A er en mengde, og vi vil se på mengden av objekter som ikke er med i A , vil vi normalt ønske å avgrense oss til de objektene som er av interesse i den aktuelle sammenhengen.
- Alt dette gjør det aktuelt å innføre et eget symbol for en *universell mengde*, uten at denne universelle mengden trenger å være den samme i enhver sammenheng.

Mengder

Mengder

Definisjon

Mengder

Definisjon

a) Vi lar \mathcal{E} stå for den universelle mengden.

Mengder

Definisjon

- a) Vi lar \mathcal{E} stå for den universelle mengden.
- b) \mathcal{E} vil betegne forskjellige mengder i forskjellige sammenhenger, men skal ligge fast i enhver gitt sammenheng.

Mengder

Definisjon

- a) Vi lar \mathcal{E} stå for den universelle mengden.
- b) \mathcal{E} vil betegne forskjellige mengder i forskjellige sammenhenger, men skal ligge fast i enhver gitt sammenheng.
- c) I noen sammenhenger (definisjoner, oppgaver) vil \mathcal{E} bare betegne en vilkårlig universell mengde, mens i andre sammenhenger vil betydningen av \mathcal{E} bli presisert.

Mengder

Definisjon

- a) Vi lar \mathcal{E} stå for den universelle mengden.
- b) \mathcal{E} vil betegne forskjellige mengder i forskjellige sammenhenger, men skal ligge fast i enhver gitt sammenheng.
- c) I noen sammenhenger (definisjoner, oppgaver) vil \mathcal{E} bare betegne en vilkårlig universell mengde, mens i andre sammenhenger vil betydningen av \mathcal{E} bli presisert.

Vi bruker \mathcal{E} fordi læreboka gjør det. Det er imidlertid ingen fast notasjon for den universelle mengden uavhengig av forfatter og anvendelsesområde slik det er med \emptyset for den tomme mengden.

Mengdealgebra

Mengdealgebra

- Vi skal nå se på noen grunnleggende operasjoner på mengder.

Mengdealgebra

- Vi skal nå se på noen grunnleggende operasjoner på mengder.
- Disse kalles **Boolske operasjoner**.

Mengdealgebra

- Vi skal nå se på noen grunnleggende operasjoner på mengder.
- Disse kalles **Boolske operasjoner**.
- Det er en nær sammenheng mellom Boolske operasjoner og utsagnslogiske bindeord.

Mengdealgebra

- Vi skal nå se på noen grunnleggende operasjoner på mengder.
- Disse kalles **Boolske operasjoner**.
- Det er en nær sammenheng mellom Boolske operasjoner og utsagnslogiske bindeord.
- Utsagnslogikk og Boolsk mengdelære er begge instanser av det som kalles **Boolsk algebra**.

Mengdealgebra

- Vi skal nå se på noen grunnleggende operasjoner på mengder.
- Disse kalles **Boolske operasjoner**.
- Det er en nær sammenheng mellom Boolske operasjoner og utsagnslogiske bindeord.
- Utsagnslogikk og Boolsk mengdelære er begge instanser av det som kalles **Boolsk algebra**.
- Et mer systematisk studium av Boolsk algebra er relevant for retninger innen teoretisk informatikk.

Mengdealgebra – union

Mengdealgebra – union

Eksempel

Eksempel

- Vi har fått i oppgave å finne en digital representasjon av funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

og vet at denne funksjonen bare er definert når $|x| \geq 1$.

Eksempel

- Vi har fått i oppgave å finne en digital representasjon av funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

og vet at denne funksjonen bare er definert når $|x| \geq 1$.

- Det betyr at vi må finne mengden av 32-bit representasjoner av tall ≥ 1 og av tall ≤ -1 og så slå disse mengdene sammen.

Eksempel

- Vi har fått i oppgave å finne en digital representasjon av funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

og vet at denne funksjonen bare er definert når $|x| \geq 1$.

- Det betyr at vi må finne mengden av 32-bit representasjoner av tall ≥ 1 og av tall ≤ -1 og så slå disse mengdene sammen.
- En slik sammenslåing kaller vi en **union**.

Mengdealgebra – union

Mengdealgebra – union

Definisjon

Mengdealgebra – union

Definisjon

- Hvis A og B er to mengder, definerer vi **unionen** av A og B som

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Definisjon

- Hvis A og B er to mengder, definerer vi **unionen** av A og B som

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

- Unionen av A og B består altså av de objektene som er element i minst en av de to mengdene A og B , men også gjerne i begge.

Mengdealgebra – union

Mengdealgebra – union

Eksempel

Mengdealgebra – union

Eksempel

- \mathbb{N} er unionen av mengdene av positive partall og positive oddetall.

Mengdealgebra – union

Eksempel

- \mathbb{N} er unionen av mengdene av positive partall og positive oddetall.
- Løsningsmengden til ulikheten $x^2 > 1$ er

Mengdealgebra – union

Eksempel

- \mathbb{N} er unionen av mengdene av positive partall og positive oddetall.
- Løsningsmengden til ulikheten $x^2 > 1$ er

$$\{x : x < -1\} \cup \{x : x > 1\}.$$

Mengdealgebra – union

Eksempel

- \mathbb{N} er unionen av mengdene av positive partall og positive oddetall.
- Løsningsmengden til ulikheten $x^2 > 1$ er

$$\{x : x < -1\} \cup \{x : x > 1\}.$$

- Mengden av 32-bitsekvenser som representerer tall x med $|x| \geq 1$ kan skrives som

Mengdealgebra – union

Eksempel

- \mathbb{N} er unionen av mengdene av positive partall og positive oddetall.
- Løsningsmengden til ulikheten $x^2 > 1$ er

$$\{x : x < -1\} \cup \{x : x > 1\}.$$

- Mengden av 32-bitsekvenser som representerer tall x med $|x| \geq 1$ kan skrives som

$$\{01\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^{30}\} \cup \{11\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^{30}\}$$

Mengdealgebra – union

Eksempel

- \mathbb{N} er unionen av mengdene av positive partall og positive oddetall.
- Løsningsmengden til ulikheten $x^2 > 1$ er

$$\{x : x < -1\} \cup \{x : x > 1\}.$$

- Mengden av 32-bitsekvenser som representerer tall x med $|x| \geq 1$ kan skrives som

$$\{01\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^{30}\} \cup \{11\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^{30}\}$$

hvor $\{0, 1\}^{30}$ er en vanlig måte å uttrykke mengden av 30-bits sekvenser.

Mengdealgebra – union

Mengdealgebra – union

- En vanlig måte å illustrere Boolske operasjoner på er ved å bruke Venndiagrammer.

Mengdealgebra – union

- En vanlig måte å illustrere Boolske operasjoner på er ved å bruke **Venndiagrammer**.
- Et Venndiagram for en Boolsk kombinasjon av to eller tre mengder vil bestå av en sirkel for hver mengde, slik at de overlapper hverandre.

Mengdealgebra – union

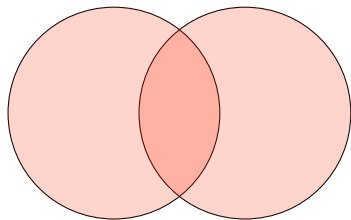
- En vanlig måte å illustrere Boolske operasjoner på er ved å bruke **Venndiagrammer**.
- Et Venndiagram for en Boolsk kombinasjon av to eller tre mengder vil bestå av en sirkel for hver mengde, slik at de overlapper hverandre.
- Hvis vi har bruk for å markere den universelle mengden \mathcal{E} , gjør vi det ved et rektangel som omslutter alle sirklene.

Mengdealgebra – union

- En vanlig måte å illustrere Boolske operasjoner på er ved å bruke **Venndiagrammer**.
- Et Venndiagram for en Boolsk kombinasjon av to eller tre mengder vil bestå av en sirkel for hver mengde, slik at de overlapper hverandre.
- Hvis vi har bruk for å markere den universelle mengden \mathcal{E} , gjør vi det ved et rektangel som omslutter alle sirklene.
- Ved å bruke forskjellige skraveringer, kan vi illustrere hvilke punkter som ligger i mengden og hvilke som ikke gjør det.

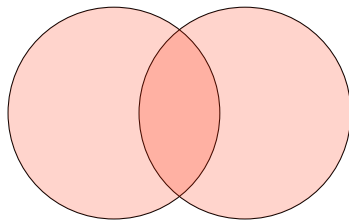
Mengdealgebra – union

Mengdealgebra – union



$$A \cup B$$

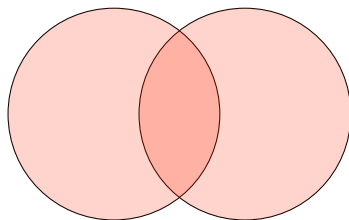
Mengdealgebra – union



$A \cup B$

- Vi har en sirkel for hver mengde.

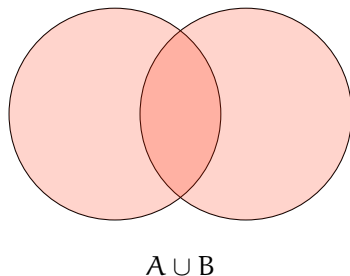
Mengdealgebra – union



$A \cup B$

- Vi har en sirkel for hver mengde.
- Vi har fire felter, et for hver kombinasjon av $x \in A$ og $x \in B$.

Mengdealgebra – union



- Vi har en sirkel for hver mengde.
- Vi har fire felter, et for hver kombinasjon av $x \in A$ og $x \in B$.
- Hele det fargede området markerer $A \cup B$.

Mengdealgebra – snitt

Mengdealgebra – snitt

Eksempel

Eksempel

- La A være mengden av naturlige tall n slik at n kan deles på både 6 og 8.

Mengdealgebra – snitt

Eksempel

- La A være mengden av naturlige tall n slik at n kan deles på både 6 og 8.
- La B være mengden av reelle tall x slik at

$$((x - 1)^2 - 1)^2 + (x^4 - 16)^4 = 0$$

Eksempel

- La A være mengden av naturlige tall n slik at n kan deles på både 6 og 8.
- La B være mengden av reelle tall x slik at

$$((x - 1)^2 - 1)^2 + (x^4 - 16)^4 = 0$$

- La C være mengden av digitale representasjoner av ikke-negative partall.

Eksempel

- La A være mengden av naturlige tall n slik at n kan deles på både 6 og 8.
- La B være mengden av reelle tall x slik at

$$((x - 1)^2 - 1)^2 + (x^4 - 16)^4 = 0$$

- La C være mengden av digitale representasjoner av ikke-negative partall.
- I tilfelle A gir vi to krav direkte.

Eksempel

- La A være mengden av naturlige tall n slik at n kan deles på både 6 og 8.
- La B være mengden av reelle tall x slik at

$$((x - 1)^2 - 1)^2 + (x^4 - 16)^4 = 0$$

- La C være mengden av digitale representasjoner av ikke-negative partall.
- I tilfelle A gir vi to krav direkte.
- I tilfelle B krever vi at vi både må ha at $(x - 1)^2 - 1 = 0$ og at $x^4 - 16 = 0$.

Eksempel

- La A være mengden av naturlige tall n slik at n kan deles på både 6 og 8.
- La B være mengden av reelle tall x slik at

$$((x - 1)^2 - 1)^2 + (x^4 - 16)^4 = 0$$

- La C være mengden av digitale representasjoner av ikke-negative partall.
- I tilfelle A gir vi to krav direkte.
- I tilfelle B krever vi at vi både må ha at $(x - 1)^2 - 1 = 0$ og at $x^4 - 16 = 0$.
- I tilfelle C krever vi at bitsekvensen må ha den foreskrevne lengde, og både må starte med 0 og ende med 0.

Mengdealgebra – snitt

Mengdealgebra – snitt

Definisjon

Mengdealgebra – snitt

Definisjon

- La A og B være to mengder.

Mengdealgebra – snitt

Definisjon

- La A og B være to mengder.
- Med **snittet** av A og B mener vi

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definisjon

- La A og B være to mengder.
- Med **snittet** av A og B mener vi

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

- $A \cap B$ består altså av de objektene som er elementer **både** i A og i B .

Definisjon

- La A og B være to mengder.
- Med **snittet** av A og B mener vi

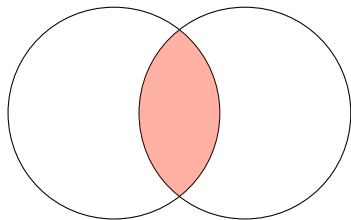
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

- $A \cap B$ består altså av de objektene som er elementer **både** i A og i B .

Vi kan også illustrere snitt ved et Venndiagram.

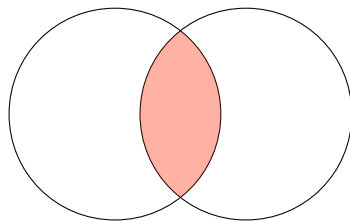
Mengdealgebra – snitt

Mengdealgebra – snitt



$$A \cap B$$

Mengdealgebra – snitt



$$A \cap B$$

- Vi farger eller skraverer det feltet som markerer fellesdelen av de to mengdene.

Mengdealgebra – snitt

Eksempel

Eksempel

- Hvis

Eksempel

- Hvis

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Eksempel

- Hvis

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Eksempel

- Hvis

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

er $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, mens $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

Eksempel

- Hvis

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

er $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, mens $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

- Hvis

Eksempel

- Hvis

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

er $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, mens $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

- Hvis

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Eksempel

- Hvis

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

er $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, mens $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

- Hvis

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Eksempel

- Hvis

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

er $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, mens $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

- Hvis

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

er $A \cup B$ hele planet, mens $A \cap B$ er mengden av punkter på enhets sirkelen.

Mengdealgebra – komplement

Mengdealgebra – komplement

- Vi har ikke hatt bruk for den universelle mengden \mathcal{E} i definisjonen av **union** og **snitt**.

Mengdealgebra – komplement

- Vi har ikke hatt bruk for den universelle mengden \mathcal{E} i definisjonen av **union** og **snitt**.
- Vi har formulert definisjonen av \cup og \cap slik at sammenhengen med \vee og \wedge skal komme klart frem.

Mengdealgebra – komplement

- Vi har ikke hatt bruk for den universelle mengden \mathcal{E} i definisjonen av **union** og **snitt**.
- Vi har formulert definisjonen av \cup og \cap slik at sammenhengen med \vee og \wedge skal komme klart frem.
- Den neste mengdeoperasjonen vi skal se på er **komplement**.

Mengdealgebra – komplement

- Vi har ikke hatt bruk for den universelle mengden \mathcal{E} i definisjonen av **union** og **snitt**.
- Vi har formulert definisjonen av \cup og \cap slik at sammenhengen med \vee og \wedge skal komme klart frem.
- Den neste mengdeoperasjonen vi skal se på er **komplement**.
- Den vil ha et nært slektskap til \neg .

Mengdealgebra – komplement

- Vi har ikke hatt bruk for den universelle mengden \mathcal{E} i definisjonen av **union** og **snitt**.
- Vi har formulert definisjonen av \cup og \cap slik at sammenhengen med \vee og \wedge skal komme klart frem.
- Den neste mengdeoperasjonen vi skal se på er **komplement**.
- Den vil ha et nært slektskap til \neg .
- For å definere komplement må vi ha tilgang til en universell mengde.

Mengdealgebra – komplement

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

1. La P betegne mengden av primtall.

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

1. La P betegne mengden av primtall.

Et **sammensatt tall** er et naturlig tall $\neq 1$ som ikke er et primtall.

Eksempel

1. La P betegne mengden av primtall.

Et **sammensatt tall** er et naturlig tall $\neq 1$ som ikke er et primtall.

Vi kan definere

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \notin P \cup \{1\}\}.$$

Eksempel

1. La P betegne mengden av primtall.

Et **sammensatt tall** er et naturlig tall $\neq 1$ som ikke er et primtall.

Vi kan definere

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \notin P \cup \{1\}\}.$$

Det hadde vært enklere om vi kunnet skrive dette på en kortere måte som vi alle kunne forstå.

Mengdealgebra – komplement

Mengdealgebra – komplement

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

2. Vi definerer de **irrasjonale tallene** som mengden av de reelle tallene som ikke er rasjonale.

Eksempel (Fortsatt)

2. Vi definerer de **irrasjonale tallene** som mengden av de reelle tallene som ikke er rasjonale.

Dette kunne vi skrevet som

$$\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Eksempel (Fortsatt)

2. Vi definerer de **irrasjonale tallene** som mengden av de reelle tallene som ikke er rasjonale.

Dette kunne vi skrevet som

$$\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Hvis alle forstår oss om vi skriver $\overline{\mathbb{Q}}$ istedenfor, ville det vært greiere.

Mengdealgebra – komplement

Mengdealgebra – komplement

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

3. Vi har ord både for partall og for oddetall, men vi har ikke et eget ord for tall som ikke kan deles på 13 (eller 17 for den saks skyld).

Eksempel (Fortsatt)

3. Vi har ord både for partall og for oddetall, men vi har ikke et eget ord for tall som ikke kan deles på 13 (eller 17 for den saks skyld). I denne sammenhengen var det klart at vi snakker om hele tall, dvs

$$\mathcal{E} = \mathbb{J}.$$

Eksempel (Fortsatt)

3. Vi har ord både for partall og for oddetall, men vi har ikke et eget ord for tall som ikke kan deles på 13 (eller 17 for den saks skyld). I denne sammenhengen var det klart at vi snakker om hele tall, dvs

$$\mathcal{E} = \mathbb{J}.$$

Vi vil si at mengden av tall som ikke kan deles på 13 er **komplementet** til mengden av tall som kan deles på 13, og vi markerer komplementet til en mengde ved å sette en strek over uttrykket for mengden.

Mengdealgebra – komplement

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

La \mathcal{E} være en universell mengde og la A være en mengde hvor alle elementene ligger i \mathcal{E} .

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

La \mathcal{E} være en universell mengde og la A være en mengde hvor alle elementene ligger i \mathcal{E} .

Med **komplementet** til A mener vi

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

La \mathcal{E} være en universell mengde og la A være en mengde hvor alle elementene ligger i \mathcal{E} .

Med **komplementet** til A mener vi

$$\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\} = \{x \in \mathcal{E} : \neg(x \in A)\}.$$

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

La \mathcal{E} være en universell mengde og la A være en mengde hvor alle elementene ligger i \mathcal{E} .

Med **komplementet** til A mener vi

$$\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\} = \{x \in \mathcal{E} : \neg(x \in A)\}.$$

Når vi skriver \bar{A} skal det alltid være klart at \mathcal{E} er kjent

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

La \mathcal{E} være en universell mengde og la A være en mengde hvor alle elementene ligger i \mathcal{E} .

Med **komplementet** til A mener vi

$$\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\} = \{x \in \mathcal{E} : \neg(x \in A)\}.$$

Når vi skriver \bar{A} skal det alltid være klart at \mathcal{E} er kjent (eller at vi arbeider generelt med en vilkårlig \mathcal{E} .)

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

La \mathcal{E} være en universell mengde og la A være en mengde hvor alle elementene ligger i \mathcal{E} .

Med **komplementet** til A mener vi

$$\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\} = \{x \in \mathcal{E} : \neg(x \in A)\}.$$

Når vi skriver \bar{A} skal det alltid være klart at \mathcal{E} er kjent (eller at vi arbeider generelt med en vilkårlig \mathcal{E} .)

Vår notasjon for komplement er ikke uvanlig, men på ingen måte enerådende.

Mengdealgebra – komplement

Definisjon

La \mathcal{E} være en universell mengde og la A være en mengde hvor alle elementene ligger i \mathcal{E} .

Med **komplementet** til A mener vi

$$\bar{A} = \{x \in \mathcal{E} : x \notin A\} = \{x \in \mathcal{E} : \neg(x \in A)\}.$$

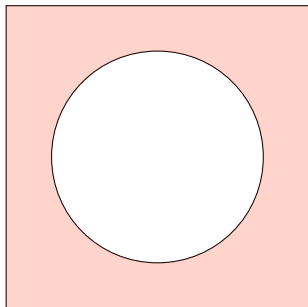
Når vi skriver \bar{A} skal det alltid være klart at \mathcal{E} er kjent (eller at vi arbeider generelt med en vilkårlig \mathcal{E} .)

Vår notasjon for komplement er ikke uvanlig, men på ingen måte enerådende.

Vi kan beskrive komplementet ved et Venndiagram.

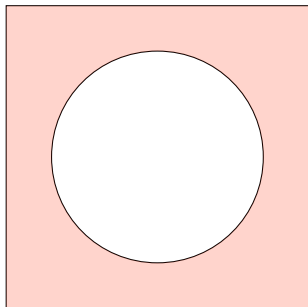
Mengdealgebra – komplement

Mengdealgebra – komplement



\bar{A}

Mengdealgebra – komplement



\bar{A}

- Det fargede/skraverte feltet markerer komplementet.

Mengdealgebra – komplement

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

- Hvis $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og $A = \{2, 3, 5\}$, er $\bar{A} = \{0, 1, 4, 6, 7\}$.

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

- Hvis $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og $A = \{2, 3, 5\}$, er $\bar{A} = \{0, 1, 4, 6, 7\}$.
- Hvis \mathcal{E} er som over og $B = \{1, 3, 5, 7\}$, er $\bar{B} = \{0, 2, 4, 6\}$

Mengdealgebra – komplement

Eksempel

- Hvis $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og $A = \{2, 3, 5\}$, er $\bar{A} = \{0, 1, 4, 6, 7\}$.
- Hvis \mathcal{E} er som over og $B = \{1, 3, 5, 7\}$, er $\bar{B} = \{0, 2, 4, 6\}$
- Hvis $\mathcal{E} = \mathbb{J}$ og $B = \{1, 3, 5, 7\}$ er

$$\bar{B} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}.$$

Mengdealgebra – mengdedifferens

Mengdealgebra – mengdedifferens

- Den siste mengdeoperasjonen vi skal innføre er **mengdedifferens**.

Mengdealgebra – mengdedifferens

- Den siste mengdeoperasjonen vi skal innføre er **mengdedifferens**.

Definisjon

Mengdealgebra – mengdedifferens

- Den siste mengdeoperasjonen vi skal innføre er **mengdedifferens**.

Definisjon

Hvis A og B er to mengder, er **differansen** A **minus** B definert ved

Mengdealgebra – mengdedifferens

- Den siste mengdeoperasjonen vi skal innføre er **mengdedifferens**.

Definisjon

Hvis A og B er to mengder, er **differansen** A **minus** B definert ved

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Mengdealgebra – mengdedifferens

- Den siste mengdeoperasjonen vi skal innføre er **mengdedifferens**.

Definisjon

Hvis A og B er to mengder, er **differansen** A **minus** B definert ved

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Vi bruker ofte betegnelsen **mengdedifferens**

Mengdealgebra – mengdedifferens

- Den siste mengdeoperasjonen vi skal innføre er **mengdedifferens**.

Definisjon

Hvis A og B er to mengder, er **differansen** A **minus** B definert ved

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Vi bruker ofte betegnelsen **mengdedifferens**

En alternativ skrivemåte mye brukt i litteraturen er $A \setminus B$.

Mengdealgebra – mengdedifferens

- Den siste mengdeoperasjonen vi skal innføre er **mengdedifferens**.

Definisjon

Hvis A og B er to mengder, er **differansen** A **minus** B definert ved

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

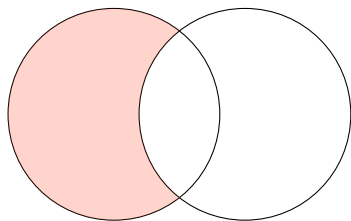
Vi bruker ofte betegnelsen **mengdedifferens**

En alternativ skrivemåte mye brukt i litteraturen er $A \setminus B$.

Vi kan også illustrere mengdedifferens ved et Venndiagram.

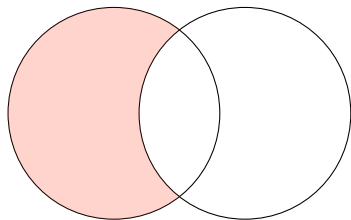
Mengdealgebra – mengdedifferens

Mengdealgebra – mengdedifferens



$A - B$

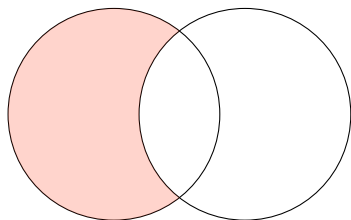
Mengdealgebra – mengdedifferens



$A - B$

- Det fargede/skraverte området markerer differensen

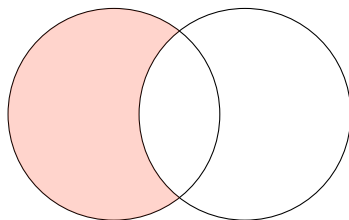
Mengdealgebra – mengdedifferens



$A - B$

- Det fargede/skraverte området markerer differensen
- Vi har ikke hatt bruk for ε her.

Mengdealgebra – mengdedifferens



$A - B$

- Det fargede/skraverte området markerer differensen
- Vi har ikke hatt bruk for ε her.
- $A - B = A \cap \bar{B}$

Venndiagrammer

Venndiagrammer

- Den virkelige nytten av Venndiagrammer ligger i at de kan brukes til å studere sammenhengen mellom forskjellige Boolske uttrykk.

Venndiagrammer

- Den virkelige nytten av Venndiagrammer ligger i at de kan brukes til å studere sammenhengen mellom forskjellige Boolske uttrykk.
- I en viss forstand er bruk av Venndiagrammer en parallell til bruk av sannhetsverditabeller.

Venndiagrammer

- Den virkelige nytten av Venndiagrammer ligger i at de kan brukes til å studere sammenhengen mellom forskjellige Boolske uttrykk.
- I en viss forstand er bruk av Venndiagrammer en parallell til bruk av sannhetsverditabeller.
- Vi kommer til å vise noen eksempler på tavlen på hvordan vi kan etablere mengdeteoretiske identiteter ved hjelp av Venndiagrammer.

Venndiagrammer

Venn diagrammer

Oppgave

Oppgave

Vi definerer ofte *symmetrisk differens* ved

Oppgave

Vi definerer ofte *symmetrisk differens* ved

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Oppgave

Vi definerer ofte *symmetrisk differens* ved

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

- a) Illustrer $A \triangle B$ ved et Venndiagram.

Oppgave

Vi definerer ofte **symmetrisk differens** ved

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

- a) Illustrer $A \triangle B$ ved et Venndiagram.
- b) Vis at $(A \triangle B) \triangle C$ kan illustreres ved Venndiagrammet på neste side.

Oppgave

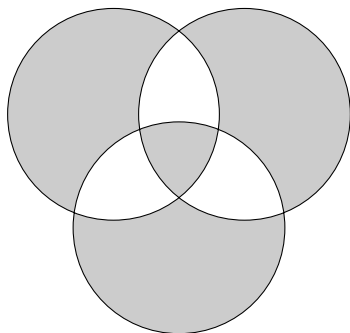
Vi definerer ofte **symmetrisk differens** ved

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

- Illustrer $A \triangle B$ ved et Venndiagram.
- Vis at $(A \triangle B) \triangle C$ kan illustreres ved Venndiagrammet på neste side.
- Drøft hvorfor dette viser at vi kunne skrevet $A \triangle B \triangle C$ uten bruk av parenteser.

Venn diagrammer

Venndiagrammer



$$(A \triangle B) \triangle C$$